







Artigo Original

DOI: 10.66983/recet.v7i1.5750

Um estudo sobre polinômios ortogonais aplicados ao Método de Elementos Finitos para resolver equações diferenciais

  OLIVEIRA, R. L. P.*^{a,1} e   ROCHA, A. M.^{†,a,2}

^aUniversidade Federal do Recôncavo da Bahia

Submitted: 26 nov. 2025 Approved 26 nov. 2025 Published 11 abr. 2026

Resumo

A resolução de equações diferenciais é fundamental na modelagem de fenômenos em física, engenharia e ciências aplicadas. Um exemplo clássico é o problema da deflexão de uma placa retangular, modelado por um problema de valor de contorno. Contudo, soluções analíticas são restritas a casos simples, o que reforça a importância dos métodos numéricos. Entre as abordagens existentes, o método dos elementos finitos destaca-se por sua flexibilidade na representação de soluções em domínios complexos. Seu princípio básico consiste em obter uma solução aproximada dentro de um subespaço de projeção, no qual a equação diferencial é projetada. Preliminarmente foram abordados os fundamentos matemáticos que sustentam a formulação numérica, abrangendo conceitos da análise funcional, espaços de Hilbert e aproximações de funções contínuas por séries de funções ortogonais. O objetivo central é empregar polinômios como funções base no método dos elementos finitos, analisando a convergência da solução numérica por meio de implementações computacionais realizadas no software GNU OCTAVE. Os resultados demonstraram estabilidade e convergência das soluções à medida que se ampliava a dimensão do subespaço de projeção.

Palavras-chave: Elementos Finitos, Polinômios Ortogonais, Implementações Computacionais.

Abstract

The solution of differential equations is fundamental in modeling phenomena in physics, engineering, and applied sciences. A classical example is the deflection problem of a rectangular plate, which can be modeled as a boundary value problem. However, analytical solutions are limited to simple cases, which highlights the importance of numerical methods. Among the existing approaches, the Finite Element Method stands out due to its flexibility in representing solutions over complex domains. Its basic principle consists of obtaining an approximate solution within a projection subspace onto which the differential equation is projected. Initially, the mathematical foundations underlying the numerical formulation are presented, including concepts from functional analysis, Hilbert spaces, and the approximation of continuous functions by series of orthogonal functions. The main objective is to employ polynomials as basis functions in the Finite Element Method, analyzing the convergence of the numerical solution through computational implementations carried out in the GNU OCTAVE software. The results demonstrate the stability and convergence of the solutions as the dimension of the projection subspace increases.

Keywords: Finite Elements, Orthogonal Polynomials, Computational Implementations.

Sumário

1	Introdução	10
2	Séries de funções e polinômios ortogonais	11
2.1	Polinômios ortogonais	11
2.2	Polinômios de Legendre	13
3	Método dos elementos finitos aplicados em equações diferenciais ordinárias	14
3.1	Polinômios ortogonais aplicados no MEF	14
4	Resultados e discussões	15
5	Considerações finais	18
	Referências	18

1. INTRODUÇÃO

As equações diferenciais são uma área de grande relevância no campo das ciências em geral, vistas as suas diversas aplicações. A sua resolução possui técnicas limitadas e, segundo (M. Castro Cunha, 2000), grande parte dos métodos vistos em cursos de cálculo resume-se a equações ordinárias lineares com coeficientes constantes. No entanto, em muitos problemas práticos, surge a necessidade de resolver equações não lineares, de onde vêm a importância do uso de métodos numéricos para determinar soluções aproximadas para tais problemas.

Esta classe de documento foi preparada no Overleaf e compilada com Xe_{La}T_EX. Nenhum erro foi encontrado durante o processo de compilação.

A utilização de métodos aproximativos constitui uma abordagem amplamente empregada na obtenção de soluções satisfatórias para problemas em diversas áreas. Em (Rocha; Azevedo; Oliveira; Correa, 2018), apresenta-se a aproximação numérica de equações integrais funcionais uma classe de equações integrais não lineares do tipo Fredholm de segunda espécie por meio do método de colocação com funções de base contínuas por partes. A aproximação por polinômios apresenta diversas vantagens, uma vez que tais funções possuem propriedades que tornam mais simples o tratamento analítico e numérico de problemas. Por exemplo, as funções polinomiais permitem calcular derivadas e integrais de forma direta ou computacional com elevado grau de precisão. Técnicas baseadas em funções polinomiais podem ser utilizadas na solução numérica de equações diferenciais, como o método abordado ao longo deste artigo: o Método dos Elementos Finitos (MEF). Com o avanço dos recursos computacionais, esse método tornou-se amplamente difundido e consolidado nas últimas décadas.

Neste trabalho, temos como objetivo principal utilizar o MEF para determinar soluções aproximadas de equações diferenciais ordinárias. Seu princípio básico consiste em obter uma solução aproximada dentro de um subespaço de projeção, no qual a equação diferencial é projetada. Inicialmente abordaremos os polinômios ortogonais e, principalmente, a característica de construção por uma fórmula recursiva, o que amplia sua aplicabilidade computacional. Posteriormente, apresentamos o Método de Elementos Finitos, e assim empregamos os polinômios ortogonais para construir as funções bases que geram os subespaços de projeções da solução. Por fim, apresentamos os resultados das implementações computacionais realizadas em um problema-teste. Em todo trabalho, foi utilizado o software GNU OCTAVE como ferramenta computacional.

2. SÉRIES DE FUNÇÕES E POLINÔMIOS ORTOGONAIS

Nesta Seção, iremos abordar a noção de convergência para séries de funções além de métodos para construir as seqüências de polinômios ortogonais bem como seus principais resultados.

Definição 2.1 (Convergência de séries de funções). *Dada qualquer seqüência ortonormal (e_k) em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Seja (s_n) a seqüência definida pelas somas parciais,*

$$s_n = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n,$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ são números reais. Quando esta seqüência converge para um número $s \in \mathcal{H}$, ou seja, $\|s_n - s\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, dizemos que s é a soma da série infinita (s_n) , ou simplesmente a série, isto é

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k = s. \tag{1}$$

Quando (s_n) não converge, dizemos que a série é divergente.

Teorema 2.1 (Convergência). *Seja (e_n) uma seqüência ortonormal em um espaço de Hilbert \mathcal{H} , então:*

(a) A série (1) converge se, e somente se, a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

converge.

(b) Se a série (1) converge para x , ou seja, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$, então

os coeficientes α_k são determinados pelos coeficientes de Fourier $\langle x, e_k \rangle$. Neste caso, (1) pode ser reescrito da seguinte

forma:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

(c) Para qualquer $x \in \mathcal{H}$, a série (1) com $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle$ converge.

Demonstração: (a) Seja

$$s_n = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \text{ e } \sigma_n = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2,$$

então pela ortonormalidade e_n , para quaisquer $n > m$ temos,

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\|^2 &= \|\alpha_{m+1} e_{m+1} + \dots + \alpha_n e_n\|^2 \\ &= |\alpha_{m+1}|^2 \|e_{m+1}\|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 \|e_n\|^2 \\ &= |\alpha_{m+1}|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 = \sigma_n - \sigma_m. \end{aligned}$$

Portanto, (s_n) é uma seqüência de Cauchy em \mathcal{H} se, e somente se, (σ_n) é Cauchy em \mathbb{R} . Como \mathcal{H} e \mathbb{R} são completos, segue a primeira afirmação do teorema.

(b) Tomando o produto interno de s_n por cada e_k , $k \leq n$ fixado, temos que $\langle s_n, e_k \rangle = \alpha_k$. Por hipótese $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$. Como o produto interno é contínuo,

$$\langle s_n, e_j \rangle \rightarrow \langle x, e_j \rangle \quad (j \leq k).$$

Podemos considerar $k \leq n$ suficientemente grande de modo que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle s_n, e_k \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_k \\ \langle \lim_{n \rightarrow \infty} s_n, e_k \rangle &= \alpha_k \\ \langle x, e_k \rangle &= \alpha_k. \end{aligned}$$

(c) A série

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

é uma série numérica em \mathbb{R} e, obviamente, crescente, pois seus termos são positivos. Além disso, pela desigualdade de Bessel, temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

logo também é limitada, assim a série é convergente. Pelo item (a), temos que também converge a série em \mathcal{H} , dada por:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

□

2.1. Polinômios ortogonais

De acordo com (Yen, 2013), os polinômios ortogonais bem como suas seqüências são conceitos poderosos para resolver problemas numéricos, como por exemplo equações diferenciais ordinárias. Faremos uma abordagem com as definições e principais teoremas que usaremos na nossa proposta e apresentaremos a construção dos Polinômios de Legendre.

Um polinômio p de grau n é uma função da forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

com $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$.

Denotaremos por P_n o subespaço vetorial dos polinômios de grau no máximo n . Desta forma, notamos que o espaço vetorial

de todos os polinômios é:

$$P := \bigcup_{k=0}^{\infty} P_k.$$

Evidentemente, P é um subespaço do espaço de Hilbert das funções contínuas definidas no intervalo $[a, b]$ cujo produto interno usual é:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\omega(t) dt, \quad (2)$$

onde $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$ e ω é uma função contínua positiva (Kreyszig, 1989). Como P é um subespaço do conjunto das funções contínuas, podemos tomar em P o produto interno definido por (2), restrito a P .

Definição 2.2. Dado um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em P , uma **seqüência de polinômios ortogonais** (p_n) é uma seqüência onde cada polinômio $p_n(x)$ de grau n e satisfaz a condição de ortogonalidade entre seus elementos

$$\langle p_n, p_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \rho_n > 0, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Um dos métodos da literatura para construir essa seqüência é o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, que se mostra um método computacionalmente inviável, pois o mesmo possui um custo computacional alto. No entanto, apresentaremos ao decorrer desta seção métodos com menor custo computacional. Dada uma seqüência ortonormal de polinômios, (p_n) , é possível demonstrar que esta seqüência é linearmente independente (Kreyszig, 1989). Além disso, o subespaço P_n é gerado pelo conjunto $\{p_k\}_{k=0}^n$ e, conseqüentemente, $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ gera todo o espaço dos polinômios P .

Teorema 2.2. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em P . São equivalentes as seguintes afirmações:

- (a) (p_n) é uma seqüência de polinômios ortogonais com respeito a $\langle \cdot, \cdot \rangle$;
- (b) $\langle p(x), p_m(x) \rangle = 0$ para todo polinômio $p(x)$ de grau menor que m e $\langle p(x), p_m(x) \rangle \neq 0$, para todo $p(x)$ de grau exatamente m ;
- (c) $\langle x^l, p_m(x) \rangle = 0$ para $l < m$ e $\langle x^m, p_m(x) \rangle \neq 0$;

Demonstração: A relação (b) \Leftrightarrow (c) é obtida diretamente pela definições de polinômios ortogonais. Para demonstrar que (a) \Leftrightarrow (b), basta ver que se $p(x)$ é um polinômio de grau l , então existem constantes $c_{l,k}$ tais que podemos reescrever da seguinte forma,

$$p(x) = \sum_{k=0}^l c_{l,k} p_k(x), c_{l,l} \neq 0.$$

Pela bilinearidade do produto interno,

$$\begin{aligned} \langle p(x), p_m(x) \rangle &= \sum_{k=0}^l c_{l,k} \langle p_k(x), p_m(x) \rangle \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq l, \\ c_{m,m} \langle p_m(x), p_m(x) \rangle \neq 0, & \text{se } m = l, \end{cases} \end{aligned}$$

□

Definição 2.3. A seqüência de polinômios (p_n) é chamada de **seqüência de polinômios ortonormais** se

$$\langle p_l^*(x), p_m^*(x) \rangle = \delta_{l,m}, l, m = 0, 1, \dots,$$

onde $\delta_{l,m}$ chamado de delta de Kronecker, definido por

$$\delta_{l,m} = \begin{cases} 0 & \text{se } l \neq m, \\ 1 & \text{se } l = m. \end{cases}$$

Podemos observar que, dada uma seqüência de polinômios ortogonais (p_n) , podemos construir uma seqüência de polinômios ortonormais (p_n^*) definindo $p_n^* := p_n / \|p_n\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veremos, a seguir, uma relação de recorrência que nos garante que, dados três polinômios ortogonais consecutivos, eles estarão conectados por esta relação de recorrência.

Teorema 2.3. Seja (p_n) uma seqüência de polinômios ortogonais em $C(a, b)$. Então vale a formula,

$$p_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})p_n(x) - \alpha_{n+1}p_{n-1}(x), n \geq 0 \quad (3)$$

com $p_{-1}(x) := 0$, $p_0(x) = 1$, e os coeficientes $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \gamma_{n+1} \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, dados por,

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \\ \beta_{n+1} &= \gamma_{n+1} \frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle} \\ \alpha_{n+1} &= \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle p_n, p_n \rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}. \end{aligned} \quad (4)$$

Demonstração: Usaremos

$$p_n(x) = a_{n,n}x^n + \dots + a_{n,1}x + a_{n,0}$$

para denotar um polinômio de grau n .

Observando que $xp_n(x)$ é um polinômio de grau $n+1$, podemos escrever:

$$xp_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i p_i(x), \quad (5)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} a_{n,n}x^{n+1} + \dots + a_{n,1}x^2 + a_{n,0}x &= \sum_{i=0}^n b_i p_i(x) + b_{n+1}p_{n+1}(x) \\ &= \sum_{i=0}^n b_i p_i(x) + b_{n+1}a_{n+1,n+1}x^{n+1} + \dots + a_{n+1,1}x + a_{n+1,0}. \end{aligned}$$

Igualando os termos de maior grau, temos:

$$a_{n,n} = b_{n+1}a_{n+1,n+1}.$$

Assim,

$$b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}.$$

Além disso, para qualquer j , temos:

$$\langle xp_n(x), p_j(x) \rangle = \int_a^b p_n(x)xp_j(x)dx = \langle p_n(x), xp_j(x) \rangle,$$

e, em particular, para $j \leq n-2$, sabemos que $p_j(x)$ tem grau $n-2$ e assim $xp_j(x)$ tem grau $n-1$. Como $p_n(x)$ tem grau n , pelo Teorema 2.2,

$$\langle xp_n, p_j \rangle = \langle p_n, xp_j \rangle = 0,$$

para $j \leq n-2$. Por outro lado, usando (5), temos:

$$0 = \langle xp_n, p_j \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n+1} b_i p_i, p_j \right\rangle = \sum_{i=0}^{n+1} b_j \langle p_i, p_j \rangle = b_j \langle p_j, p_j \rangle.$$

ou seja, $b_j = 0$, para todo $j \leq n-2$. Novamente, na Equação

(5), obtemos:

$$xp_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i p_i(x)$$

$$xp_n(x) = b_{n+1} p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + b_{n-1} p_{n-1}(x).$$

Isolando $p_{n+1}(x)$, obtemos

$$p_{n+1}(x) = \frac{xp_n(x)}{b_{n+1}} - \frac{b_n p_n(x)}{b_{n+1}} - \frac{b_{n-1} p_{n-1}(x)}{b_{n+1}}$$

$$= \left(\frac{1}{b_{n+1}} x - \frac{b_n}{b_{n+1}} \right) p_n(x) - \left(\frac{b_{n-1}}{b_{n+1}} \right) p_{n-1}(x). \quad (6)$$

Reescrevendo (6) com os respectivos coeficientes,

$$p_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1} x - \beta_{n+1}) p_n(x) - \alpha_{n+1} p_{n-1}(x), \quad (7)$$

onde

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}}, \alpha_{n+1} = \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}, \beta_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+1}}.$$

Agora, vamos determinar os valores de γ_{n+1} , β_{n+1} e α_{n+1} . Inicialmente, vimos que $b_{n+1} = a_{n,n}/a_{n+1,n+1}$, logo $\gamma_{n+1} = a_{n+1,n+1}/a_{n,n}$.

Como $\langle p_{n+1}, p_n \rangle = 0$ em (7), segue que

$$0 = \langle p_{n+1}, p_n \rangle = \gamma_{n+1} \langle xp_n, p_n \rangle - \beta_{n+1} \langle p_n, p_n \rangle - \alpha_{n+1} \langle p_{n-1}, p_n \rangle,$$

mas $\langle p_{n-1}, p_n \rangle = 0$. Desta forma, obtemos o valor do outro coeficiente,

$$\beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle}.$$

Resta calcular α_{n+1} . De maneira análoga, temos

$$0 = \langle p_{n+1}, p_{n-1} \rangle$$

$$= \gamma_{n+1} \langle xp_n, p_{n-1} \rangle - \beta_{n+1} \langle p_n, p_{n-1} \rangle - \alpha_{n+1} \langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle,$$

e como $\langle p_n, p_{n-1} \rangle = 0$, obtemos:

$$\alpha_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xp_n, p_{n-1} \rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}. \quad (8)$$

Vejam, separadamente, uma expressão para o cálculo de $\langle xp_n, p_{n-1} \rangle$.

Aplicando a fórmula (7) para determinar p_n , temos que:

$$p_n(x) = (\gamma_n x - \beta_n) p_{n-1}(x) - \alpha_n p_{n-2}(x)$$

$$= \gamma_n x p_{n-1}(x) - \beta_n p_{n-1}(x) - \alpha_n p_{n-2}(x)$$

isolando $x p_{n-1}(x)$,

$$x p_{n-1}(x) = \frac{1}{\gamma_n} p_n(x) + \frac{\beta_n}{\gamma_n} p_{n-1}(x) + \frac{\alpha_n}{\gamma_n} p_{n-2}(x). \quad (9)$$

Por fim, usando (9), segue que

$$\langle xp_n, p_{n-1} \rangle = \langle p_n, x p_{n-1} \rangle$$

$$= \frac{1}{\gamma_n} \langle p_n, p_n \rangle + \frac{\beta_n}{\gamma_n} \langle p_n, p_{n-1} \rangle + \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \langle p_n, p_{n-2} \rangle$$

$$= \frac{1}{\gamma_n} \langle p_n, p_n \rangle,$$

e, substituindo em (8), concluímos que,

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle p_n, p_n \rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}.$$

□

O Teorema 2.3 nos informa que dada uma sequência de polinômios ortogonais (p_n), estes polinômios satisfazem a fórmula de recorrência (4). Por outro lado, podemos usá-la para construir sequências de polinômios ortogonais. Para isso, notemos que γ_{n+1} depende do coeficiente $a_{n+1,n+1}$, associado ao termo de maior grau de p_{n+1} . Desta forma, vamos impor escolhas para γ_{n+1} a depender do que é encontrado na literatura (Yen, 2013). A escolha do intervalo $[a, b]$, bem como da função ω , nos dará diferentes sequências de polinômios ortogonais, que veremos na Subseção 2.2.

2.2. Polinômios de Legendre

Nesta subseção, construiremos uma sequência de polinômios ortogonais tais quais os polinômios de Legendre a fim de usá-los para construir a base do subespaço de projeção que utilizaremos no Método de Elementos Finitos. É importante salientar que a escolha dos polinômios de Legendre, embora existam outros modelos de polinômios ortogonais, deve-se à simplicidade no cálculo do produto interno entre esses termos, bem como à definição do seu intervalo de integração.

Considerando o produto interno usual para o espaço vetorial das funções contínuas $C[a, b]$, com $[a, b] = [-1, 1]$, ou seja, considerando $\omega(x) = 1$,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx,$$

vamos obter esta sequência de polinômios ortogonais, a menos de multiplicação por constantes, utilizando a relação de recorrência:

$$p_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1} x - \beta_{n+1}) p_n(x) - \alpha_{n+1} p_{n-1}(x),$$

com $\gamma_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}$. Iniciando com $n = 0$ e considerando $p_{-1} = 0$ e $p_0 = 1$, temos $\gamma_1 = 1$ sabendo disso determinaremos p_1 . O termo α_1 não é necessário o cálculo pois $p_{-1} = 0$. Desta forma,

$$p_1(x) = x$$

$$p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$p_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{6}x - \frac{6}{9}x = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$p_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$p_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

Continuando, obteremos uma sequência (p_n) ortogonal. Veja em Figura 1, os gráficos dos primeiros polinômios de Legendre no intervalo $[-1, 1]$.

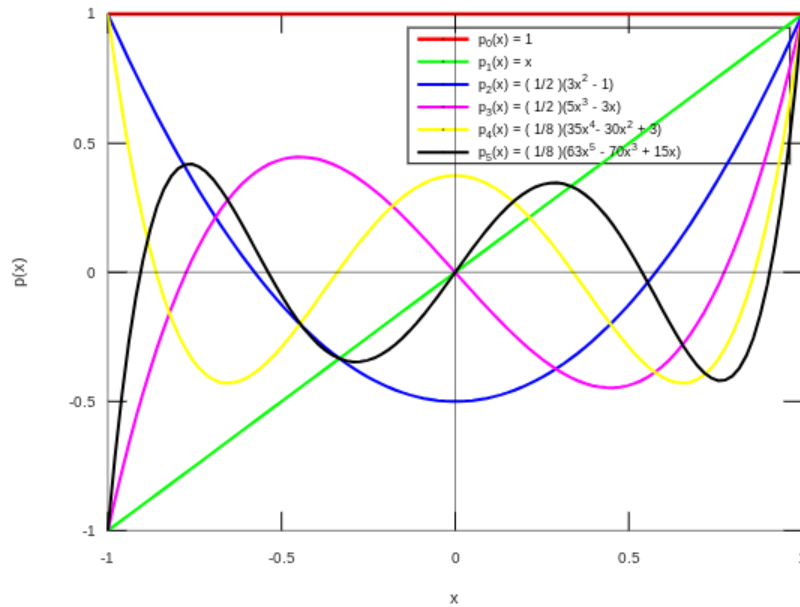
Notemos que esta relação de recorrência pode ser reescrita por:

$$p_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x p_n(x) - \frac{n}{n+1} p_{n-1}(x), n \geq 0. \quad (10)$$

A Equação 10 generaliza os **Polinômios de Legendre** para $n \geq 0$, com

- $\gamma_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}$;
- $\beta_{n+1} = 0$; e
- $\alpha_{n+1} = \frac{n}{n+1}$,

e com o produto interno usual para o espaço vetorial das funções contínuas de $[-1, 1]$. Notemos que $p_n(1) = 1, \forall n, p_n(-1) = 1$, se n par e $p_n(-1) = -1$, se n ímpar.

Figura 1. Gráficos dos Polinômios de Legendre p_k , para $k = 0, 1, \dots, 5$.

Fonte: Autores.

Resumidamente, vimos nesta seção, que dada uma função, podemos escrevê-la como uma série de funções ortogonais, em particular, por polinômios ortogonais. Considerando uma sequência de polinômios ortogonais de grau menor ou igual a n , esse conjunto gera um subespaço do espaço das funções contínuas. No Método de Elementos Finitos, vamos procurar soluções aproximadas nesse subespaço.

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Segundo M. Castro Cunha (2000), conhecemos poucas técnicas matemáticas gerais para encontrar soluções analíticas para as equações diferenciais. Boa parte do que conhecemos se restringe a equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes. Neste sentido, os métodos numéricos vêm sendo bastante utilizados e desenvolvidos cada vez mais com o avanço da tecnologia. Dentre os métodos mais utilizados, destacamos o Método de Diferenças Finitas e o Método de Elementos Finitos.

Com base em Rincon and Ishih (2013), o Método das Diferenças Finitas aproxima derivadas por expansões em séries de Taylor, resultando em sistemas algébricos definidos em malhas discretas. Essa técnica permite obter soluções numéricas de equações diferenciais de forma direta, embora sua precisão dependa da escolha da discretização e da estabilidade do esquema. O método das projeções, por sua vez, busca aproximar a solução em um subespaço de dimensão finita gerado por funções-base. O método dos elementos finitos é um caso particular, no qual a solução é construída como combinação linear de funções contínuas associadas ao domínio. Neste trabalho, considera-se o uso de polinômios ortogonais como funções-base, devido às suas propriedades analíticas favoráveis.

3.1. Polinômios ortogonais aplicados no MEF

Consideremos o problema padrão de Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d(x), & a < x < b \\ y(a) = y(b) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

onde $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ são funções com derivadas contínuas, $y(a), y(b) \in \mathbb{R}$ dependentes das condições de fronteira.

Agora, consideremos o problema de Sturm-Liouville, definido sobre o intervalo (a, b) e, sem perda de generalidade, vamos considerar o problema (11) no intervalo $[-1, 1]$. Fazendo uma mudança de variável em (11) para que o domínio se restrinja a $[-1, 1]$, tomando

$$x = x(v) = a + \frac{(b-a)}{2}(v+1),$$

quando $x = a$, temos $v = -1$ e quando $x = b$, temos $v = 1$.

Pela regra da cadeia, obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dv}.$$

Como

$$\frac{dx}{dv} = \frac{(b-a)}{2} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{2}{(b-a)},$$

temos,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dv} \frac{2}{(b-a)} = y'(x).$$

Já para a segunda derivada, obteremos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dv} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dv}{dx} \\ &= \frac{d}{dv} \left(\frac{2}{(b-a)} \frac{dy}{dv} \right) \frac{dv}{dx} = \frac{2}{(b-a)} \frac{d^2y}{dv^2} \cdot \frac{dv}{dx} \\ &= \frac{2}{(b-a)} \frac{d^2y}{dv^2} \cdot \frac{2}{(b-a)} = \frac{4}{(b-a)^2} \frac{d^2y}{dv^2} = y''(x) \end{aligned}$$

e, substituindo em (11), chegaremos a:

$$\frac{4a(x(v))}{(b-a)^2} y''(x(v)) + \frac{2b(x(v))}{(b-a)} y'(x(v)) + c(x(v))y(x(v)) = d(x(v)).$$

$$\text{Fazendo } A(v) = a(x(v)) \frac{4}{(b-a)^2}, \quad B(v) = b(x(v)) \frac{2}{(b-a)},$$

$C(v) = c(x(v))$ e $D(v) = d(x(v))$, teremos a expressão (11) escrita da seguinte forma,

$$\begin{cases} A(v)y''(v) + B(v)y'(v) + C(v)y(v) = D(v), -1 \leq v \leq 1 \\ y(-1) = y(1) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Procuraremos uma solução aproximada do problema (12) no subespaço gerado pela sequência de polinômios de ordem até m , ou seja, no subespaço $P = \text{span}\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$. Desta forma, a solução neste subespaço é dado por:

$$y_m(v) = \sum_{j=0}^m c_j \phi_j(v), \quad (13)$$

onde ϕ_j são as funções base e c_j são os coeficientes a serem determinados, e as funções bases satisfazem as condições de contorno,

$$\phi_j(-1) = \phi_j(1) = 0, \quad \forall j.$$

Para determinar tais ϕ_j , vamos utilizar os polinômios ortogonais de Legendre, denotados anteriormente por p_n , de tal modo a seguir a seguinte relação de recorrência:

$$\phi_n(x) = p_n(x) - p_{n-2}(x), \quad n \geq 3$$

e, desta forma, satisfazem as condições de contorno,

$$\phi_n(-1) = \phi_n(1) = 0.$$

Uma vez que são conhecidas as funções bases, o objetivo será determinar os coeficientes c_j da solução aproximada (13) e sua primeira e segunda derivada são, respectivamente:

$$y'_m(v) = \sum_{j=0}^m c_j \phi'_j(v), \quad y''_m(v) = \sum_{j=0}^m c_j \phi''_j(v).$$

Substituindo em (12),

$$A(v) \sum_{j=0}^m c_j \phi''_j(v) + B(v) \sum_{j=0}^m c_j \phi'_j(v) + C(v) \sum_{j=0}^m c_j \phi_j(v) = D(v).$$

Reorganizando, temos:

$$\sum_{j=0}^m c_j (A(v)\phi''_j(v) + B(v)\phi'_j(v) + C(v)\phi_j(v)) = D(v).$$

No Método de Elementos Finitos, vamos fazer a projeção da equação diferencial sobre o subespaço P . Para isso basta aplicar o produto interno sobre a equação diferencial pelos elementos da base de P , ou seja, multiplicamos (12) por p_i , $i = 0, 1, \dots, m$ e integramos a equação restante em $[-1, 1]$, observe que,

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{j=0}^m c_j (A(v)\phi''_j(v) + B(v)\phi'_j(v) + C(v)\phi_j(v)), p_i(v) \right\rangle \\ &= \langle D(v), p_i(v) \rangle \\ & \sum_{j=0}^m c_j \langle (A(v)\phi''_j(v) + B(v)\phi'_j(v) + C(v)\phi_j(v)), p_i(v) \rangle \\ &= \langle D(v), p_i(v) \rangle, \end{aligned}$$

onde, por definição,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m c_j \int_{-1}^1 [A(v)\phi''_j(v) + B(v)\phi'_j(v) + C(v)\phi_j(v)] p_i(v) dx \\ &= \int_{-1}^1 D(v) p_i(v) dv, \quad i = 0, \dots, m. \end{aligned}$$

Isto nos dá um sistema com $m + 1$ equações lineares com $m + 1$ incógnitas, e além disso. Vale ressaltar que, por se tratar de resultados numéricos, todas as integrais envolvidas na aplicação do método serão avaliadas por meio de técnicas de integração numérica, implementadas também no GNU OCTAVE.

$$\int_{-1}^1 \phi''_j(v) p_i(v) dx = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } j \leq i, \\ a \in \mathbb{R} & , \quad \text{se } j > i. \end{cases}$$

Generalizando,

$$\int_{-1}^1 \phi_j(v) p_i(v) dx = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } j \neq i, \\ \|p_i(v)\|^2 & , \quad \text{se } j = i. \end{cases}$$

A matriz do sistema resultante terá estrutura esparsa devido à escolha das funções base geradas por polinômios ortogonais. Como as entradas da matriz são dadas por produtos internos entre essas funções de base (e possivelmente suas derivadas), a propriedade de ortogonalidade implica que muitos desses produtos internos se anulam. Consequentemente, a maior parte dos coeficientes da matriz são iguais a zero, restando apenas alguns termos próximos da diagonal principal. Em particular, dependendo da ordem das derivadas envolvidas, essa estrutura leva a uma matriz pentadiagonal, o que reduz significativamente o custo computacional e facilita a resolução numérica do sistema linear associado.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, apresentaremos exemplos de equações diferenciais e explorar o Método de Elementos Finitos para encontrar soluções numéricas que serão apresentada por meio de plotagens utilizando o Software *GNU OCTAVE*.

Exemplo 4.1. *Seja o problema de valor de contorno (PVC)*

$$\begin{cases} y'' + 4x^2 y(x) = 6x \cos(x^2 - 1) & -1 \leq x \leq 1 \\ y(-1) = y(1) = 0, \end{cases} \quad (14)$$

Vamos encontrar a solução aproximada a partir de (13), utilizando as funções base geradas pela sequência de polinômios ortogonais de Legendre.

Como é de interesse verificar a convergência do método vamos comparar a solução numérica com a solução analítica do PVC e avaliaremos o erro apresentado. A equação tem como solução analítica $y(x) = x \sin(x^2 - 1)$.

Como em (14) o intervalo é $[-1, 1]$, não se faz necessário aplicar a mudança de variável. Vamos aplicar diretamente o método e resolver nosso sistema encontrado computacionalmente. Inicialmente se faz necessário apresentar as funções base $\phi_i(x)$, tais que satisfazem as condições de contorno do problema inicial. Utilizando a sequência de Polinômios Ortogonais de Legendre, teremos a seguinte relação,

$$\phi_n(x) = p_n(x) - p_{n-2}(x) \quad n \geq 3.$$

essa condição garante que para $n \geq 3$, $\phi_n(-1) = \phi_n(1) = 0$. Resta determinar $\phi_i(x)$ para $i = 0, 1, 2$, por conveniência propomos que sejam polinômios de grau 3 e satisfazendo às

condições de contorno. Com isso observamos que tais funções base restantes tem como divisores os polinômios $(x-1)$ e $(x+1)$, assim adotaremos,

$$\phi_0(x) = (x-1)(x+1) = (x^2 - 1)$$

$$\phi_1(x) = (x-1)(x+1)(x^2 - 1/2) = (x^3 - 1/2x^2 - x + 1/2)$$

$$\phi_2(x) = (x-1)(x+1)(x^2 + 1/2) = (x^3 + 1/2x^2 - x - 1/2).$$

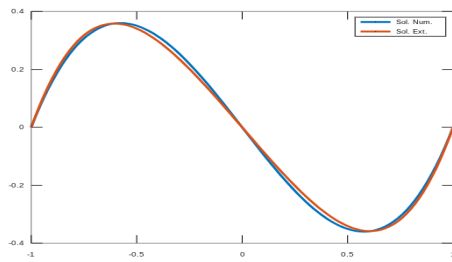
Determinadas as $\phi_i(x)$, faremos a projeção do nosso problema utilizando (13), onde chegaremos ao seguinte sistema de equações:

$$\sum_{j=0}^m c_j \int_{-1}^1 [\phi_j''(x) + 4x^2 \phi_j(x)] [\phi_i(x)] dx$$

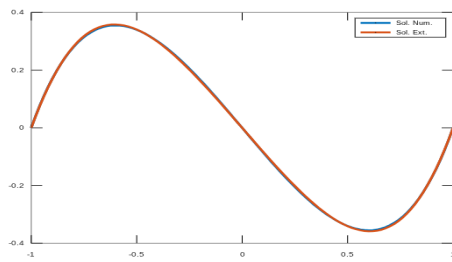
$$= \int_{-1}^1 [6x \cos(x^2 - 1)] [\phi_i(x)] dx.$$

O primeiro membro da igualdade resulta em uma matriz $A = [a_{ij}]$, com $i, j = 0, \dots, m$. O segundo, um vetor $B = b_i$. Com isso, teremos um sistema $Ac_i = b_i$, com $m + 1$ incógnitas e $m + 1$ variáveis, essas incógnitas são justamente os coeficientes c_i a serem determinados.

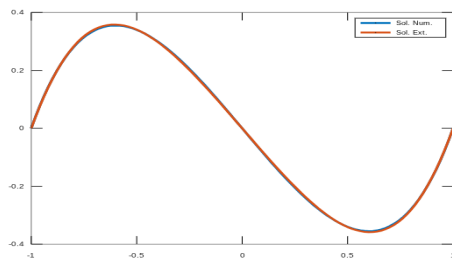
Figura 2. Solução Numérica da Equação 13.



(a) $m = 3$



(b) $m = 7$



(c) $m = 10$

Fonte: Autores.

Nas Fig. 2a, Fig. 2b e Fig. 2c, apresentamos a solução numérica através da expressão (13), com $m = 3$, $m = 6$ e $m = 10$. Como (14) tem solução analítica $y = x \sin(x^2 - 1)$, calculamos o

erro de aproximação utilizando a norma do máximo, ou seja

$$\|f_{num} - f_{ext}\|_{\infty} = \max_{x \in [-1,1]} |f_{num}(x) - f_{ext}(x)|$$

$$\approx \max_i |f_{num}(x_i) - f_{ext}(x_i)|.$$

Respectivamente, para valores de m iguais a 3, 6 e 10, temos os seguintes erros: 0.04582, 0.01001 e $3.0360 \cdot 10^{-3}$. Notemos quando aumentamos m , a solução numérica se aproxima da solução analítica, mostrando a convergência do método.

Exemplo 4.2. Aplicação do MEF em um problema de deflexão de uma placa retangular.

A deflexão de placas é um fenômeno descrito por equações diferenciais, nas quais se modelam as deformações causadas pela aplicação de carregamentos transversais. Esse tipo de análise é fundamental no estudo e verificação de estruturas, sendo particularmente relevante na avaliação de comportamentos mecânicos e estruturais.

Neste contexto, considera-se o problema de determinar a linha elástica de uma placa retangular uniformemente carregada e sujeita a tensão axial, assumindo pequenas deflexões. O modelo pode ser descrito um problema de valor inicial com uma equação diferencial ordinária de segunda ordem da forma:

$$\begin{cases} y''(x) - \frac{S}{D}y(x) = -\frac{ql}{2D} + \frac{ql}{2D}x^2, & 0 \leq x \leq l, \\ y(0) = y(l) = 0, \end{cases}$$

onde

- comprimento da placa $l = 1,0$ m
- rigidez $D = 10^7$ N m
- força axial $S = 200$ Ncm
- intensidade da carga uniforme $q = 7$ N/cm².

A fim de utilizar a mesma base gerada pelos polinômios de Legendre, realiza-se uma mudança de variável que transforma o intervalo $[0, l]$ em $[-1, 1]$. Definindo

$$x(v) = \frac{l}{2}(v + 1),$$

tem-se, pela regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx},$$

e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dv^2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2.$$

Como

$$\frac{dx}{dv} = \frac{l}{2} \implies \frac{dv}{dx} = \frac{2}{l},$$

segue que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{l^2} \frac{d^2y}{dv^2}.$$

Substituindo essas relações na equação diferencial original, obtém-se o problema equivalente no novo domínio:

$$\frac{4}{l^2} \frac{d^2y}{dv^2} - \frac{S}{D}y(v) = -\frac{ql}{2D} + \frac{ql}{2D}(x(v))^2, \quad (15)$$

que pode ser reescrita como:

$$\frac{d^2y}{dv^2} - \frac{Sl^2}{4D}y(v) = -\frac{ql^2}{4D} + \frac{ql^4}{16D}(v+1)^2.$$

Dessa forma, o problema de valor de contorno transforma-se em: e , para $m = 7$:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dv^2} - \frac{Sl^2}{4D}y(v) = -\frac{ql^2}{4D} + \frac{ql^4}{16D}(v+1)^2, v \in [-1, 1] \\ y(-1) = y(1) = 0. \end{cases}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2.0412 \cdot 10^{-8} \\ -1.1089 \cdot 10^{-8} \\ -9.3231 \cdot 10^{-9} \\ -2.2064 \cdot 10^{-9} \\ -4.3096 \cdot 10^{-10} \\ 7.5488 \cdot 10^{-12} \\ -3.1650 \cdot 10^{-11} \\ 1.2793 \cdot 10^{-11} \end{bmatrix}.$$

Substituindo a solução aproximada

$$y_m(v) = \sum_{j=0}^m C_j \phi_j(v),$$

na equação anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left[\sum_{j=0}^m C_j \phi_j''(v) - \frac{Sl^2}{4D} \sum_{j=0}^m C_j \phi_j(v) \right] \phi_i(v) dv \\ &= \int_{-1}^1 \left(-\frac{ql^2}{4D} + \frac{ql^4}{16D}(v+1)^2 \right) \phi_i(v) dv. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos, segue que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m C_j \left[\int_{-1}^1 \phi_j''(v) \phi_i(v) dv - \frac{Sl^2}{4D} \int_{-1}^1 \phi_j(v) \phi_i(v) dv \right] \\ &= \int_{-1}^1 \left(-\frac{ql^2}{4D} + \frac{ql^4}{16D}(v+1)^2 \right) \phi_i(v) dv. \end{aligned}$$

Aplicando integração por partes no primeiro termo, obtemos:

$$\int_{-1}^1 \phi_j''(v) \phi_i(v) dv = [\phi_j'(v) \phi_i(v)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \phi_j'(v) \phi_i'(v) dv.$$

Considerando as propriedades das funções base, o primeiro termo após aplicarmos a integração por partes é nulo, restando:

$$\int_{-1}^1 \phi_j''(v) \phi_i(v) dv = - \int_{-1}^1 \phi_j'(v) \phi_i'(v) dv.$$

Assim, define-se o sistema linear:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{-1}^1 \phi_j'(v) \phi_i'(v) dv - \frac{Sl^2}{4D} \int_{-1}^1 \phi_j(v) \phi_i(v) dv, \\ f_i &= \int_{-1}^1 \left(-\frac{ql^2}{4D} + \frac{ql^4}{16D}(v+1)^2 \right) \phi_i(v) dv, \end{aligned}$$

para $i, j = 0, 1, \dots, m$.

Dessa forma, obtém-se um sistema linear com $m+1$ equações e $m+1$ incógnitas, dado por:

$$AC = F. \tag{16}$$

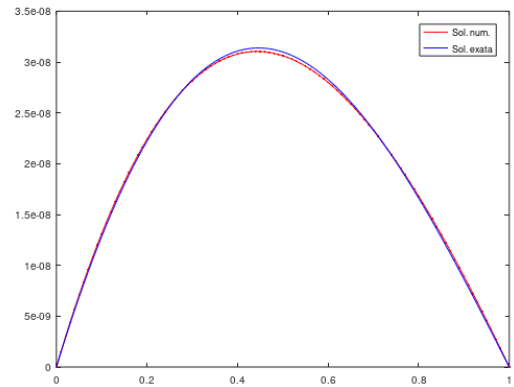
Resolvendo o sistema (16) para diferentes dimensões do subespaço aproximante, obtêm-se os coeficientes da solução aproximada.

Para $m = 3$, tem-se:

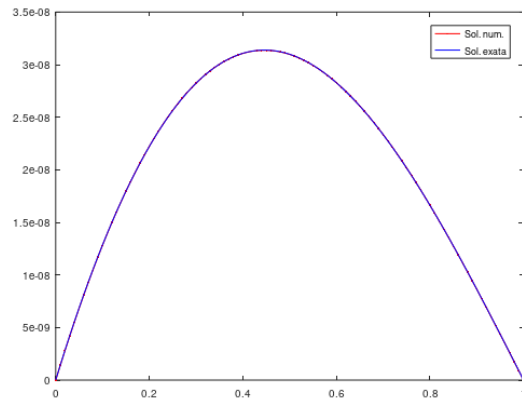
$$C = \begin{bmatrix} 2.04110 \cdot 10^{-8} \\ -1.10880 \cdot 10^{-8} \\ -0.93230 \cdot 10^{-8} \\ -0.22063 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix},$$

A equação apresentada caracteriza-se como uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem com coeficientes constantes. Nessas condições, é possível obter sua solução analítica de forma fechada, por meio da resolução da equação característica associada. Essa solução exata foi então utilizada como referência para validação da solução numérica obtida pelo método dos elementos finitos, permitindo a quantificação do erro e a análise da precisão do método empregado. Os erros associados às aproximações podem ser organizados na Tabela 1.

Figura 3. Soluções numéricas para o problema teste



(a) $m = 3$



(b) $m = 7$

Fonte: Autores.

Table 1: Erros da aproximação da solução para diferentes valores de m .

m	Erro
3	0.01040600
7	0.00057997

Veja nas Figuras 3a e 3b os gráficos das soluções numéricas

encontradas a partir do MEF para o problema teste.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As atividades desenvolvidas ao longo deste trabalho permitiram consolidar, de forma integrada, a compreensão teórica e prática sobre os polinômios ortogonais e sua aplicação na construção de funções base no Método dos Elementos Finitos (MEF). A implementação computacional realizada no GNU OCTAVE demonstrou não apenas a eficiência desses polinômios na geração de bases adequadas para a aproximação numérica, mas também a robustez do procedimento numérico adotado.

Os experimentos conduzidos mostraram que, à medida que a dimensão do subespaço de projeção era ampliada, a solução numérica convergia de forma progressiva para a solução analítica do problema. Esse comportamento confirma a consistência teórica do método, bem como sua capacidade de produzir resultados estáveis e acurados mesmo em contextos mais complexos. De modo geral, os resultados obtidos reforçam a relevância dos polinômios ortogonais na formulação variacional e apontam para a viabilidade de sua aplicação para comparação com outros métodos numéricos. Além disso, destacam o papel das ferramentas computacionais, como o GNU OCTAVE, no suporte ao estudo, análise e validação de métodos numéricos modernos. Por fim, ressalta-se que, embora a abordagem apresentada esteja alinhada a técnicas já consolidadas na literatura, o trabalho possui contribuição significativa do ponto de vista didático e formativo, especialmente no contexto de iniciação científica. Nesse sentido, o estudo se mostra relevante como instrumento de aprendizado e sistematização de conceitos, além de servir como base para investigações futuras e aprofundamentos na área de métodos numéricos.

■ REFERÊNCIAS

KREYSZIG, Erwin. **Introductory Functional Analysis with Applications**. [S. l.]: John Wiley and Sons, 1989. Cit. on p. 12.

M. CASTRO CUNHA, Maria Cristina. **Métodos numéricos**. [S. l.]: Editora da UNICAMP, 2000. Cit. on pp. 10, 14.

RINCON, Mauro A.; ISHII, Liu. **Introdução ao método de elementos finitos –Computação e Análise em Equações Diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro: UFRJ, 2013. Cit. on p. 14.

ROCHA, Adson M; AZEVEDO, Juarez S; OLIVEIRA, Saulo P; CORREA, Maicon R. **Numerical analysis of a collocation method for functional integral equations**. Applied Numerical Mathematics, Elsevier, v. 134, p. 31–45, 2018. Cit. on p. 11.

YEN, Chi Lun. **O teorema de comparação de Sturm e aplicações**. 2013. PhD thesis – [sn]. Cit. on pp. 11, 13.

