

# ESTUDO COMPARATIVO DE SISTEMAS CAÓTICOS E SISTEMAS ESTOCÁSTICOS NA NATUREZA

Silva, S. G. dos S. \*

Ferreira, R. M. S. †

Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas

Submitted: 28 fev.2023. Approved: 18 abr.2023. Published: 18 fev.2024.

Edition: 1ª. Volume: 5º.

## RESUMO

Neste artigo buscaremos analisar aplicações de sistemas caóticos e sistemas estocásticos na natureza, com o propósito de realizar um estudo comparativo. O trabalho inicia-se com a exposição de fundamentos teóricos do oscilador amortecido, um caso de sistema caótico, elencando três tipos de amortecimento. Posteriormente, discute-se a abordagem de Paul Langevin a respeito do movimento browniano, um caso de sistema estocástico. Por conseguinte, são expostos e comparados os comportamentos de um oscilador submetido a diferentes tipos de amortecimento. Por fim, será apresentado o comportamento estocástico de uma partícula browniana. Os resultados revelam que em sistemas caóticos determinísticos as equações de movimento podem ser encontrada desde que as condições iniciais sejam conhecidas, enquanto que em sistemas estocásticos, a presença de termos aleatórios tornam impossível um cálculo exato das equações de movimento, podendo-se obter somente um valor esperado, ou seja, um valor médio de todos os estados possíveis.

**Palavras-chave:** Sistemas dinâmicos. Oscilações. Movimento Browniano.

## ABSTRACT

In this article we will seek to analyze applications of chaotic systems and stochastic systems in nature, with the purpose of carrying out a comparative study. The work begins with an exposition of the theoretical foundations of the damped oscillator, a case of chaotic system, listing three types of damping. Subsequently, Paul Langevin's approach to Brownian motion, a case of a stochastic system, is discussed. Therefore, the behaviors of an oscillator subjected to different types of damping are exposed and compared. Finally, the stochastic behavior of a Brownian particle will be presented. The results reveal that in deterministic chaotic systems the equations of motion can be found as long as the initial conditions are known, while in stochastic systems, the presence of random terms makes an exact calculation of the equations of motion impossible, and only one can be obtained. expected value, that is, an average value of all possible states.

**Keywords:** Dynamical systems. Oscillations. Brownian movement.

## Sumário

<b>Sumário</b> . . . . .	1
<b>Introdução</b> . . . . .	1
<b>O oscilador amortecido</b> . . . . .	2
Oscilações com amortecimento supercrítico . . . . .	3
Oscilações com amortecimento crítico . . . . .	3
Oscilações com amortecimento subcrítico . . . . .	3
<b>O movimento Browniano</b> . . . . .	4
O formalismo de Langevin . . . . .	4
<b>Resultados e Discussões</b> . . . . .	6
Sistemas caóticos . . . . .	6
Sistemas estocásticos . . . . .	7
<b>Considerações finais</b> . . . . .	8
<b>Referências</b> . . . . .	8

## INTRODUÇÃO

Por volta dos anos 30, na União Soviética, existiu uma preocupação com aplicação de modelos matemáticos em problemas físicos, com a aplicação da periodicidade nos fenômenos para análise física, dado que a teoria das vibrações estaria presente na natureza. Em 1937, Andronov, Vitt e Khaikin publicam um livro sobre oscilações, no qual trazem a importância de se levantar questões mais relevantes a respeito de um determinado sistema, visto que é através de tais questões que se determina um modelo matemático, o qual carrega proprieda-

\* Sammy Giulia dos Santos Silva. [sammelss@hotmail.com](mailto:sammelss@hotmail.com)

† Rogelma Maria da Silva Ferreira. Possui graduação em Física pela Universidade do Estado do Ceará (UFC), Mestrado em Física pela Universidade Federal do Ceará (UFC) e Doutorado em Física pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Tem experiência na área de Física Estatística, com ênfase em Difusão anômala. Filiação: Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas (CETEC)/ Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), Brasil. E-mail: [rogelma.maria@ufrb.edu.br](mailto:rogelma.maria@ufrb.edu.br)



ISSN:  
2763-8855

**REOCT**  
Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas



des muitas vezes atribuídas ao próprio sistema (ROQUE, 2007).

Um sistema dinâmico é definido como o agrupamento de objetos relacionados entre si cujos estados variam com o tempo (MONTEIRO, 2006). Portanto, equações diferenciais são utilizadas como modelos para este tipo de sistema. O surgimento da teoria de sistemas dinâmicos motivou-se pela preocupação acerca dos movimentos de corpos celestes e iniciou-se com os trabalhos de Henri Poincaré (1854-1912), no fim do século XIX, com o estudo quantitativo das equações diferenciais, apesar de ser o matemático George David Birkhoff (1884-1944), o primeiro a utilizar o termo para este tipo de problema (ROQUE, 2007). Alguns exemplos de sistemas dinâmicos são pêndulos, veículos em movimento, o preço de um produto, nos quais podemos verificar a relação entre grandezas variáveis que evoluem ao longo do tempo.

Com o intuito de descrever matematicamente sistemas físicos com movimentos oscilatórios, existiram tentativas como as de Aleksandr Andronov (1901-1952) (ROQUE, 2007). Contudo, este estudo foi além quando oscilações estocásticas foram observadas em experimentos de laboratórios, como também em simulações computacionais, em sistemas determinísticos. Esta descoberta motivou a criação de um modelo da dinâmica estocástica (AFRAIMOVICH, 1989).

Estudos rigorosos sobre processos estocásticos começaram no final do século XIX, motivados pela compreensão do mercado financeiro e do movimento browniano. A importância dos processos estocásticos fundamenta-se no estudo de sistemas de muitas partículas, sem a necessidade de cálculos precisos, com apenas as distribuições. Um exemplo de processo estocástico é o movimento browniano, ou seja, o movimento de uma partícula que apresenta uma massa grande comparada à massa das partículas do fluido na qual está imersa, constituído por partículas mais leves. A variável estocástica  $Y$  neste caso pode ser a posição ou a velocidade da partícula. Para cada instante de tempo  $t$ , não existe um valor específico de  $Y$ , como estamos acostumados a ver na mecânica newtoniana, e sim uma probabilidade para valores de  $Y$ .

Este artigo está dividido da seguinte forma: Na seção 1, apresenta-se o oscilador amortecido, para cada um dos três tipos de amortecimento, sendo estes, supercrítico, crítico e subcrítico, com a obtenção das equações de posição e velocidade. Na seção 2, aborda-se o movimento browniano utilizando o formalismo de Langevin. Na seção 3, ilustra-se a presença do caos em sistemas oscilatórios apresentados na seção () e da estocasticidade

no movimento browniano apresentado na seção (). Por fim, na seção 4, apresentam-se as considerações finais.

## O OSCILADOR AMORTECIDO

Ao considerar a projeção unidimensional sobre o eixo  $x$  de uma partícula de massa  $m$  em movimento oscilatório, existe um ponto  $x = 0$  definido como a origem para o qual a partícula retornará após ser deslocada. Pela Lei de Hooke (THORNTON, 2004), a força responsável por retornar o sistema à sua posição de equilíbrio estável é da forma

$$f(x) = -k_{el}x, \quad (1)$$

onde a constante elástica  $k_{el}$  assume um valor positivo, garantindo o caráter restaurador da força  $f(x)$ . Forças deste tipo estão presentes em sistemas envolvendo molas e flexões, desde que o deslocamento seja pequeno e os limites elásticos não sejam ultrapassados, caracterizando oscilações harmônicas simples ou oscilações livres. Aplicando a segunda lei de Newton e considerando que não há força externa, a equação que rege a dinâmica do sistema será dada por

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2)$$

cujas soluções são funções senoidais, por exemplo

$$x(t) = A \text{sen}(\omega_0 t - \delta), \quad (3)$$

onde  $A$  é a amplitude da oscilação, e ainda,  $\delta$  e  $\phi$  são os ângulos de fase com diferença de  $\pi/2$ .

Todavia, na maioria dos sistemas físicos oscilatórios, existem forças dissipativas que tendem a causar um amortecimento no movimento, até que a oscilação deixe de existir. Nestes casos, conhecidos como osciladores amortecidos, considera-se a existência de uma força dissipativa  $g = -b\dot{x}$ , sendo  $b > 0$  para garantir que a força seja sempre contrária a velocidade. A equação de movimento correspondente ao oscilador amortecido é dada por

$$\ddot{x} + \gamma_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4)$$

onde  $x$  equivale à posição da partícula oscilante,  $\gamma_0 = b/m$  é o parâmetro de amortecimento existente no sistema e  $\omega_0$  representa a frequência angular do sistema (THORNTON, 2004). Uma possível solução para a equação (4) pode ser escrita como

$$x(t) = H e^{a_1 t} + I e^{a_2 t}, \quad (5)$$

onde  $H$  e  $I$  são constantes associadas à amplitude de oscilação e os coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  são soluções da equação característica,

$$a^2 + \gamma_0 a + \omega_0^2 = 0. \quad (6)$$

onde,

$$a_{1,2} = \frac{-\gamma_0 \pm \sqrt{\gamma_0^2 - 4\omega_0^2}}{2}. \quad (7)$$



ISSN:  
2763-8855

**RECIIT**  
Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas



Desta maneira, existem três possibilidades: se  $\gamma_0^2 - 4\omega_0^2 > 0$ , ocorre o amortecimento supercrítico; se  $\gamma_0^2 - 4\omega_0^2 = 0$ , o amortecimento crítico; e se  $\gamma_0^2 - 4\omega_0^2 < 0$  o amortecimento subcrítico.

### Oscilações com amortecimento supercrítico

Neste caso, existem duas soluções distintas para a equação (6), ambas negativas, dado que, para  $\omega_0 \neq 0$ ,  $\sqrt{\gamma_0^2 - 4\omega_0^2} < \gamma_0$ . Substituindo os coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  na equação (5), duas soluções linearmente independentes são obtidas. Tais soluções devem satisfazer as condições iniciais. Isto é, quando  $t = 0$ ,  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = v(0) = v_0$ . Sendo assim, para  $t = 0$ , o sistema linear obtido é dado por,

$$\begin{cases} x_0 = H + I, \\ v_0 = a_1 H + a_2 I. \end{cases} \quad (8)$$

onde são encontrados,

$$H = \frac{v_0 - a_2 x_0}{a_1 - a_2} \quad (9)$$

e

$$I = \frac{a_1 x_0 - v_0}{a_1 - a_2}. \quad (10)$$

Com a substituição dos resultados das equações (9) e (10) na equação (5), obtém-se as equações de posição e velocidade para oscilações com amortecimento supercrítico,

$$x(t) = \frac{1}{a_1 - a_2} [(v_0 - a_2 x_0)e^{a_1 t} + (a_1 x_0 - v_0)e^{a_2 t}], \quad (11)$$

$$v(t) = \frac{1}{a_1 - a_2} [a_1(v_0 - a_2 x_0)e^{a_1 t} + a_2(a_1 x_0 - v_0)e^{a_2 t}]. \quad (12)$$

### Oscilações com amortecimento crítico

Dada a condição  $\gamma_0^2 - 4\omega_0^2 = 0$ , uma possível solução para a equação (4) é do tipo mostrado na equação (5). Para a equação característica (6), obtém-se duas soluções idênticas

$$a_1 = a_2 = -\frac{\gamma_0}{2}. \quad (13)$$

Substituindo os coeficientes na equação (5), encontra-se

$$x(t) = H e^{-\frac{\gamma_0}{2} t} + I e^{-\frac{\gamma_0}{2} t} = (H + I)e^{-\frac{\gamma_0}{2} t}. \quad (14)$$

Neste caso, existem duas soluções linearmente dependentes e, fazendo uso da condição  $\gamma_0^2 = 4\omega_0^2$ . Fatora-se a equação (4) a fim de obter sua solução geral e sendo

$$u = \left[ \frac{d}{dt} + \frac{\gamma_0}{2} \right] x, \quad (15)$$

a equação (4) torna-se

$$\frac{d}{dt} u + \frac{\gamma_0}{2} u = 0. \quad (16)$$

Com o uso do método de separação de variáveis, na equação (16), obtém-se

$$u(t) = e^{-\frac{\gamma_0}{2} dt} = b_1 e^{-\frac{\gamma_0}{2} t}. \quad (17)$$

Substituindo a equação (17) na equação (15), encontra-se a constante  $b_1$  dada por

$$b_1 = \left( \frac{dx}{dt} + \frac{\gamma_0}{2} x \right) e^{\frac{\gamma_0}{2} t}. \quad (18)$$

Por outro lado, a equação (18) pode ser reescrita como segue,

$$b_1 = \frac{d}{dt} (x e^{\frac{\gamma_0}{2} t}) \Rightarrow \int b_1 dt = (x e^{\frac{\gamma_0}{2} t}) \Rightarrow b_1 t + c = x e^{\frac{\gamma_0}{2} t}, \quad (19)$$

onde  $c$  é uma constante. Portanto, obtém-se

$$x = (b_1 t + c) e^{-\frac{\gamma_0}{2} t}. \quad (20)$$

A equação (20) tem duas soluções linearmente independentes e deve satisfazer as condições iniciais  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = v_0$ . Sendo  $x_0 = c$  e a velocidade da partícula dada por

$$v(t) = \left[ b_1 - \frac{\gamma_0}{2} (b_1 t + c) \right] e^{-\frac{\gamma_0}{2} t}. \quad (21)$$

Para  $t = 0$ ,  $v_0 = b_1 - \frac{\gamma_0}{2} x_0$  e  $b_1 = v_0 + \frac{\gamma_0}{2} x_0$ . Portanto, as equações de posição e velocidade para oscilações com amortecimento crítico, são dadas por

$$x(t) = \left[ \left( v_0 + \frac{\gamma_0}{2} x_0 \right) t + x_0 \right] e^{-\frac{\gamma_0}{2} t} \quad (22)$$

$$v(t) = \left\{ \left( v_0 + \frac{\gamma_0}{2} x_0 \right) - \frac{\gamma_0}{2} \left[ \left( v_0 + \frac{\gamma_0}{2} x_0 \right) t + x_0 \right] \right\} e^{-\frac{\gamma_0}{2} t}. \quad (23)$$

### Oscilações com amortecimento subcrítico

Para  $\gamma_0^2 - 4\omega_0^2 < 0$ , uma possível solução para a equação do oscilador é do tipo

$$x(t) = H e^{a_1 t} + I e^{a_2 t}. \quad (24)$$

A partir da equação característica (6), obtém-se

$$a_{1,2} = \frac{-\gamma_0 \pm i \sqrt{4\omega_0^2 - \gamma_0^2}}{2}. \quad (25)$$



Tomando-se,

$$\Delta = \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma_0^2}}{2}, \quad (26)$$

encontra-se

$$a_{1,2} = -\frac{\gamma_0}{2} \pm i\Delta. \quad (27)$$

Desta forma, a equação da posição da partícula, equação (24), será dada por

$$x(t) = He^{(-\frac{\gamma_0}{2} + i\Delta)t} + Ie^{(-\frac{\gamma_0}{2} - i\Delta)t}. \quad (28)$$

Utilizando a relação de Euler,  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , pode-se reescrever a equação (28) como

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma_0 t}{2}} [(H + I) \cos(\Delta t) + i(H - I) \sin(\Delta t)]. \quad (29)$$

Aqui vale destacar que as duas soluções da equação (29) são linearmente independentes e satisfazem matematicamente a equação (24), porém é de interesse analisar o caráter físico do problema. Portanto, a solução buscada deve pertencer ao conjunto dos números reais. Desta forma, pode-se escrever a equação (29) como ,  $x(t) = e^{-\frac{\gamma_0 t}{2}} [L \cos(\Delta t)]$ , sendo  $L$  um valor real. Para satisfazer as condições iniciais, tem-se  $x(0) = x_0 = L$  (THORNTON, 2004). Logo, as equações da posição e da velocidade da partícula para oscilações com amortecimento subcrítico, são dadas por

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma_0 t}{2}} \cos(\Delta t), \quad (30)$$

$$v(t) = (v_0 \cos(\Delta t) - x_0 \Delta \sin(\Delta t)) e^{-\frac{\gamma_0 t}{2}}, \quad (31)$$

onde  $v_0 = -\frac{\gamma_0}{2} x_0$ .

## O MOVIMENTO BROWNIANO

O botânico e físico escocês Robert Brown (1773-1858) foi o responsável por popularizar o movimento browniano no final do século XIX, ao observar em um microscópio que grãos de pólen pareciam se mexer (BROWN, 1828). Inicialmente, Brown creditou este movimento à vida, porém ele observou que este movimento ocorria igualmente com partículas inorgânicas.

O movimento browniano é definido como o movimento aleatório realizado por partículas imersas em um fluido. Os raios dessas partículas - chamadas de partículas brownianas - são maiores que os raios das partículas que compõem o fluido em que estão imersas, e quanto menores forem, mais fácil será de observar o movimento browniano (PERRIN, 1910). Por se tratar da trajetória imprevisível de partículas, o movimento browniano é um processo estocástico. Considerando uma pequena parcela do tempo de observação total, longa o bastante para que o movimento de cada partícula se dê de forma independente, e fazendo uma distribuição de probabilidades para as coordenadas da posição de uma partícula, Albert Einstein (1879 - 1955), em 1905, chegou a uma equação de

difusão, mostrando que a partícula em movimento browniano tem comportamento difusivo (EINSTEIN, 1956).

A teoria de Einstein foi demonstrada experimentalmente por Jean Perrin (1870-1942), ao observar uma grande quantidade de partículas através de um microscópio, mostrando que o movimento browniano era originado da agitação molecular. Perrin obteve também uma medida para o número de Avogrado. Mark Kac, matemático polonês que já havia estudado o fenômeno da caminhada aleatória para uma dimensão em 1947, conseguiu obter uma equação geral para o movimento, tornando possível tratar o movimento browniano como contínuo (SALINAS, 2005; SILVA; LIMA, 2007).

O formalismo de Langevin

Com o uso da mecânica newtoniana, Paul Langevin (1872 - 1946) partiu do pressuposto de que quando não há um campo de força conservativo, o movimento browniano é dado com base em uma equação diferencial estocástica (LANGEVIN, 1908). A equação de Langevin é uma aplicação da segunda lei de Newton para uma partícula livre, ou seja, na ausência de um campo de força externo, dada por (LEMONS; GYTHIEL, 1997):

$$m \frac{dv}{dt} = -\gamma v + \xi(t), \quad (32)$$

onde  $v$  é a velocidade da partícula;  $\gamma$  o coeficiente de fricção; e  $\xi(t)$  é uma força flutuante com as seguintes propriedades:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \quad (33)$$

e

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \Gamma \delta(t - t'), \quad (34)$$

sendo  $\delta(t - t')$ , a delta de Dirac e  $\Gamma$  uma constante, a qual será encontrada mais adiante através do teorema da equipartição da energia. A equação de Langevin, equação (32), foi o primeiro exemplo de uma equação diferencial com um termo flutuante, ou seja, de uma equação diferencial estocástica, cujas soluções representam uma trajetória aleatória. Para obter a solução analítica da equação, é suposta uma equação geral escrita da forma (TOMÉ; OLIVEIRA, 2014),

$$\frac{dv}{dt} + \alpha v = \frac{f(t)}{m}, \quad (35)$$

onde  $\alpha = \frac{\gamma}{m}$  e  $f(t)$  é uma função arbitrária. Com a multiplicação da equação (35) por  $e^{\alpha t}$ , pode-se reescrever a equação (35) como

$$\frac{d}{dt} v e^{\alpha t} = \frac{f(t)}{m} e^{\alpha t}. \quad (36)$$

Através da mudança de variável,  $u = v e^{\alpha t}$ , e integração da equação (36), segue-se

$$u(t) - u_0 = \frac{1}{m} \int_0^t f(t') e^{\alpha t'} dt'. \quad (37)$$



Para a variável  $v$ , obtém-se

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t} + \frac{1}{m} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t')} f(t') dt'. \quad (38)$$

Assim, a equação (38) é a solução geral da equação de Langevin. Agora, faz-se possível a obtenção da velocidade quadrática média. De acordo com a equação (33),

o valor médio da velocidade será

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t}. \quad (39)$$

Da equação (39), vê-se que para tempos longos,  $\langle v(t) \rangle \rightarrow 0$ , e para tempos curtos,  $\langle v(t) \rangle \rightarrow v_0$ . Podemos escrever a equação (38) como,

$$v^2(t) = v_0^2 e^{-2\frac{\gamma}{m}t} + \frac{2}{m} v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t')} f(t') dt' + \frac{1}{m^2} \int_0^t \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t')} e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t'')} f(t') f(t'') dt' dt''. \quad (40)$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \langle v^2(t) \rangle &= v_0^2 e^{-2\frac{\gamma}{m}t} + \frac{2}{m} v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t')} \langle f(t') \rangle dt' \\ &+ \frac{1}{m^2} \int_0^t \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t')} e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t'')} \langle f(t') f(t'') \rangle dt' dt''. \end{aligned} \quad (41)$$

De acordo com as propriedades (33) e (34), a equação (41) torna-se

$$\langle v^2(t) \rangle = v_0^2 e^{-2\frac{\gamma}{m}t} + \frac{\Gamma}{m^2} \int_0^t e^{-2\frac{\gamma}{m}(t-t')} dt'. \quad (42)$$

Através de uma mudança de variável, sendo esta,  $j = t - t'$ , no segundo termo do lado direito da equação (42), tem-se

$$\int_t^0 -e^{-2(\frac{\gamma}{m})j} dj = - \int_t^0 e^{-2(\frac{\gamma}{m})j} dj \quad (43)$$

e também de uma segunda mudança de variável  $s = -2\frac{\gamma}{m}j$ , na equação (43) encontra-se,

$$\frac{m}{2\gamma} [e^s]_{-2\frac{\gamma}{m}(t-t')}^0 = \frac{m}{2\gamma} [1 - e^{-2\frac{\gamma}{m}(t-t')}]. \quad (44)$$

Assim, na equação (41) obtém-se

$$\langle v^2(t) \rangle = v_0^2 e^{-2\frac{\gamma}{m}t} + \frac{\Gamma}{m} \frac{1}{2\gamma} [1 - e^{-2\frac{\gamma}{m}t}]. \quad (45)$$

Sabe-se que a variância da velocidade é dada por  $(\Delta v)^2 = \langle v^2(t) \rangle - \langle v(t) \rangle^2$ , desta forma encontra-se a velocidade quadrática média dada por

$$(\Delta v)^2 = \frac{\Gamma}{2\gamma m} [1 - e^{-2\frac{\gamma}{m}t}]. \quad (46)$$

Para tempos longos,

$$\langle v^2(t) \rangle \rightarrow \frac{\Gamma}{2\gamma m^2} \quad (47)$$

e

$$(\Delta v)^2 = \frac{\Gamma}{2\gamma m^2}. \quad (48)$$

O teorema da equipartição da energia da mecânica estatística diz que a energia cinética média de uma partícula em movimento corresponde a  $\frac{1}{2}k_B T$  para cada grau de liberdade do movimento da partícula (SILVA; LIMA, 2007), onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann e  $T$ , a temperatura do meio externo. Ou seja,

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T, \quad (49)$$

com o uso da equação (48), obtém-se a constante  $\Gamma$  da equação (34),

$$\Gamma = \frac{2\gamma k_B T}{m}. \quad (50)$$

Para a obtenção do deslocamento quadrático médio, sendo  $\dot{x} = v$ , segue-se

$$x = x_0 + \int_0^t v(t') dt', \quad (51)$$

com  $x_0$  representando a posição da partícula em  $t = 0$ . Através da substituição da equação (38) na equação (51),

$$x = x_0 + v_0 \frac{m}{\gamma} (1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}) + \frac{1}{m} \int_0^t e^{\frac{\gamma}{m}t''} f(t'') dt'' \int_{t''}^t e^{-\frac{\gamma}{m}t'} dt'. \quad (52)$$



Integrando a equação (52) em  $t'$ , tem-se

$$x = x_0 + v_0 \frac{m}{\gamma} (1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}) + \frac{1}{\gamma} \int_0^t f(t'') (1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t''-t)}) dt'' \quad (53)$$

Tomando a média da equação (53) e lembrando que  $\langle f(t'') \rangle = 0$ , segue-se que

$$\langle x \rangle = x_0 + v_0 \frac{m}{\gamma} (1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}) \quad (54)$$

Desta maneira, pode-se escrever

$$x - \langle x \rangle = \frac{1}{\gamma} \int_0^t f(t'') (1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t''-t)}) dt'' \quad (55)$$

Desse modo,

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \frac{\Gamma}{\gamma^2} \left[ t - 2 \frac{m}{\gamma} (1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}) + \frac{m}{2\gamma} (1 - e^{-2\frac{\gamma}{m}t}) \right] \quad (56)$$

Para tempos muito longos, o primeiro termo da equação (56) será dominante e, com o uso da equação (50), encontra-se

$$\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{2k_B T}{m\gamma} t, \quad (57)$$

$$\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 2Dt, \quad (58)$$

sendo,  $D = \frac{k_B T}{m\gamma}$ , o coeficiente de difusão.

O comportamento browniano, ou seja, a flutuação induzida no movimento de um sistema como resultado da agitação térmica dos arredores com os quais o sistema está em equilíbrio, aparece em diferentes contextos, que vão desde a difusão de partículas até a sistemas como um buraco negro, cujo movimento pode se comportar como o de uma partícula suspensa num fluido, ou mesmo na formação de galáxias (SILVA; LIMA, 2007).

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

### Sistemas caóticos

No intuito de ilustrar a presença do caos em sistemas oscilatórios e a convergência para o ponto de equilíbrio em movimentos oscilatórios com amortecimento apresentados na seção (), utilizando as equações de posição e velocidade para cada tipo de amortecimento descrito na seção 1, produziu-se os gráficos mostrados nas figuras 1, 2 e 3. Na Figura 1, a evolução de  $x$  versus  $t$  é mostrada em (a), enquanto (b) mostra  $v$  versus  $t$ , ambos para oscilações com amortecimento supercrítico, discutido na seção 1.1. Desta maneira, gerou-se a Figura 1 com o uso das equações (11) e (12), para o caso em que

$\gamma_0^2 - \omega_0^2 > 0$  e as condições iniciais  $(x_0, v_0) = (1, 0)$  com os parâmetros de controle  $\omega_0 = 1$  e  $\gamma_0 = 2.1$ .

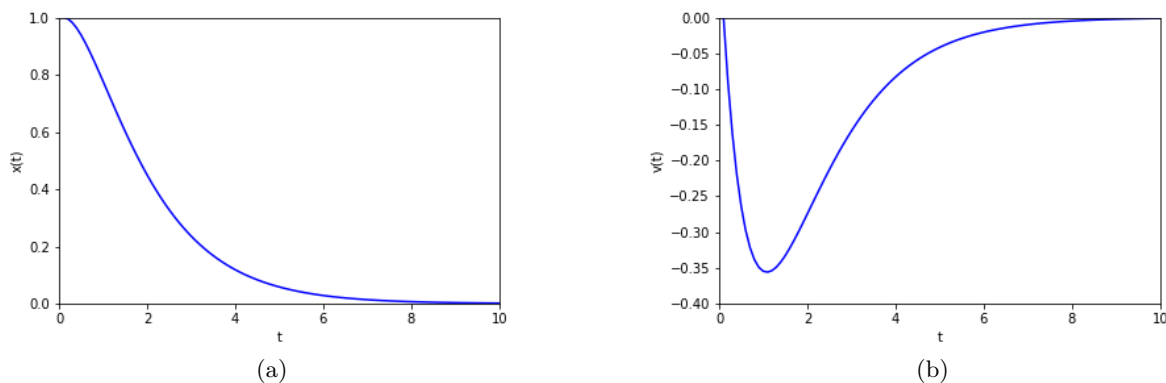
Na Figura 1 (a), no início do movimento, verifica-se que a partícula parte bruscamente da posição inicial para um valor próximo da origem. Na Figura 1 (b), vê-se uma rápida redução inicial na velocidade desta partícula. Este comportamento ocorre devido à força dissipativa contrária à velocidade e neste caso, o sistema tende a voltar para o seu estado de equilíbrio rapidamente.

Na Figura 2, compara-se o comportamento das equações (11) e (22) em (c) e das equações (12) e (23) em (d). Em ambos os casos, verifica-se que o sistema representado pela curva vermelha, o qual sofre um amortecimento crítico, onde  $\gamma_0^2 - \omega_0^2 = 0$  de acordo com a seção 1.2, comporta-se da mesma maneira que aquele sob a ação de um amortecimento supercrítico, representado pela curva azul, ou seja, da mesma maneira mostrada na Figura 1. Na obtenção da curva em vermelho, foram utilizadas as condições iniciais  $(x_0, v_0) = (1, 0)$  e os parâmetros de controle  $\omega_0 = 1$  e  $\gamma_0 = 2$ . Pouca diferença é percebida em relação aos pontos em que as mudanças no movimento acontecem para ambos os sistemas. Parece estranho, à primeira vista, a presença do termo linear  $t$  nas equações (22) e (23), particularmente quando  $t$  é suficientemente grande. Todavia, o termo negativo que está presente na função exponencial garante a convergência para  $x = 0$  e  $v = 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  e portanto, mostra-se que  $(x, v) = (0, 0)$  é um ponto de equilíbrio alcançado quando  $t \rightarrow \infty$ .

Tem-se na Figura 3, uma representação do

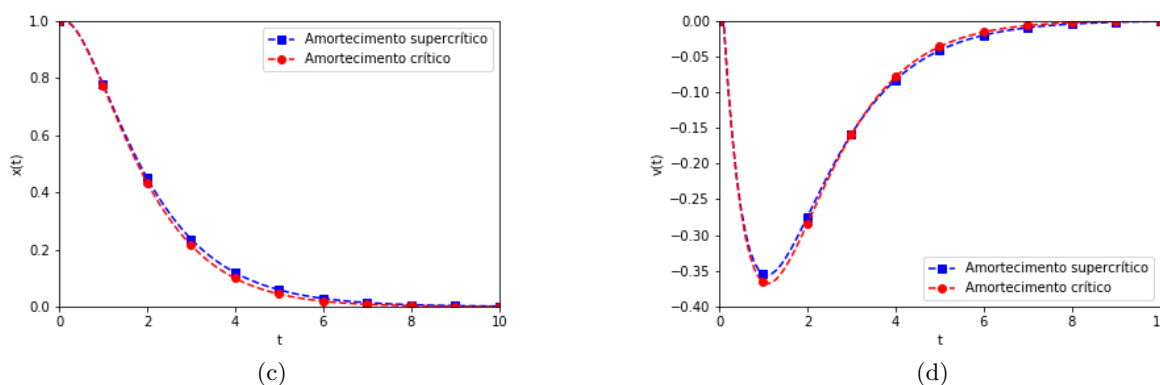


Figura 1 – Oscilações com amortecimento supercrítico.



Fonte: As autoras.

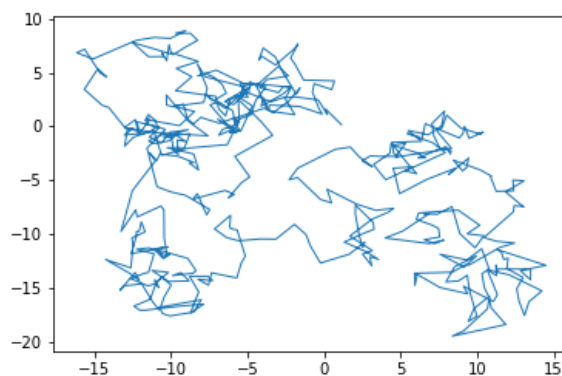
Figura 2 – Comparação entre oscilações com amortecimento supercrítico e o oscilador amortecido.



Fonte: As autoras.

amortecimento subcrítico, onde  $\gamma_0^2 - \omega_0^2 < 0$ , com o uso das equações (30) e (31) da seção 1.3 com as condições iniciais  $(x_0, v_0) = (1, 0)$  e os parâmetros de controle  $\omega_0 = 1$  e  $\gamma_0 = 0.5$ . Na Figura 3 (e), vê-se que o movimento oscilatório permanece por algum tempo até que a partícula venha a atingir o repouso na origem. Na Figura 3 (f), percebe-se que a ação da força dissipativa não ocasiona uma mudança muito brusca na velocidade, ou seja, o caráter oscilatório do movimento demora um pouco mais a ser cessado em um oscilador subamortecido.

Figura 4 – Posição ao longo do tempo de uma partícula em movimento browniano.



Fonte: As autoras.

### Sistemas estocásticos

Aqui apresentam-se as características do movimento browniano discorridas na seção (). Para isto, realizou-se duas simulações computacionais, nas quais pode-se perceber a importância do estudo da dinâmica estocástica para lidar com sistemas desta natureza.

Na Figura 4 realiza-se uma simulação envolvendo uma partícula em movimento browniano com o uso da linguagem de programação python como ferramenta, na qual pode-se ver o caráter estocástico deste movimento, ou seja, uma partícula browniana assume posições ao longo do tempo sem uma ordem aparente

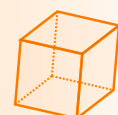
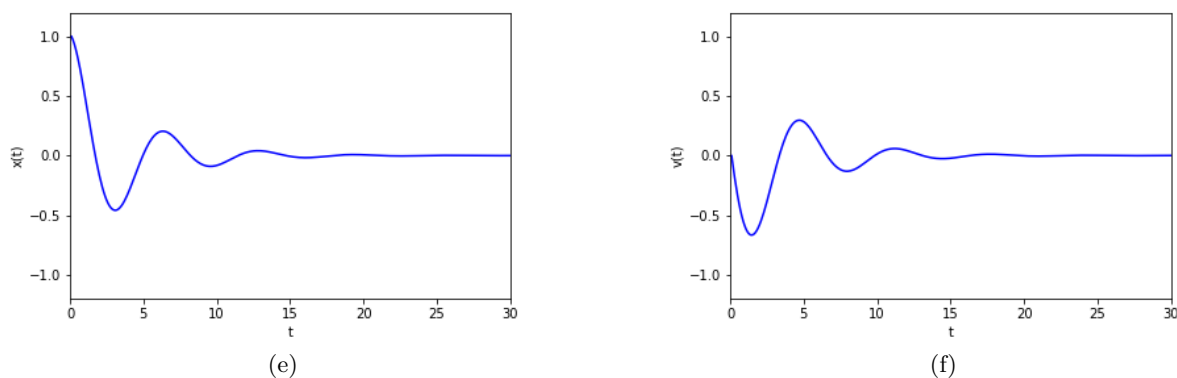


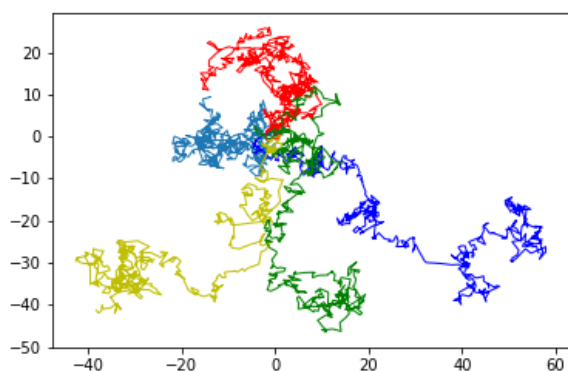
Figura 3 – Oscilações com amortecimento subcrítico.



Fonte: As autoras.

em seu trajeto. Na Figura 5, através da mesma ferramenta computacional, observa-se o movimento aleatório de cinco partículas a partir da origem, o que mostra o comportamento imprevisível deste movimento, visto que cada partícula segue uma trajetória distinta das outras.

Figura 5 – Posição ao longo do tempo de cinco partículas em movimento browniano.



Fonte: As autoras.

tória imprevisível de partículas imersas em fluido. Este movimento foi objeto de estudo de diversos cientistas, sendo abordado, assim, de diferentes formas. Neste artigo, apresentou-se a abordagem de Paul Langevin, na qual utiliza-se a aplicação da mecânica newtoniana no sistema composto por uma fricção e uma força flutuante. Verificou-se o comportamento imprevisível deste tipo de movimento, dado que cada partícula do sistema segue uma trajetória distinta das outras.

Portanto, neste trabalho, espera-se através de um estudo comparativo entre sistemas caóticos e sistemas estocásticos, mostrar a importância destes sistemas dinâmicos presentes na natureza e consequentemente, no nosso dia a dia, cujas aplicações vão desde previsões climáticas à análise da bolsa de valores, presentes nas mais variadas áreas do conhecimento, tais como em ciências biológicas e medicina, não se limitando apenas à física (LORENTZ, 1963; ALABERT, 2015; TRIAMBAK; MAHAPATRA, 2021; YAN; WU, 2021).

## Referências

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentou-se um estudo comparativo acerca dos sistemas caóticos e estocásticos presentes na natureza, utilizando para tal uma revisão rebuscada da literatura. Os modelos oscilatórios serviram como base na aplicação da teoria do caos. Os sistemas oscilatórios deste artigo demonstram que os modelos oscilatórios adequam-se ao grupo de sistemas caóticos, dado que o seu futuro se vê bruscamente alterado ao experimentar uma mínima mudança nas condições iniciais do sistema que a define.

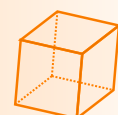
Como exemplo de sistema estocástico, utilizou-se o movimento browniano, o qual consiste em um caso de caminhada aleatória, mais especificamente, a traje-

AFRAIMOVICH, V. S. *Nonlinear Waves 1: Dynamics and Evolution*. New York, United States: Springer-Verlag, 1989. Citado na página 2.

ALABERT, A. *The Modelling of Random Phenomena. Materials Matemàtics*, v. 2015, n. 3, p. 1–42, 2015. Citado na página 8.

BROWN, R. *A brief account of microscopical observations made in the months of June, July, and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. Phil. Mag.*, v. 4, n. 161, p. 463–486, 1828. Citado na página 4.

EINSTEIN, A. *Investigations on the theory of the brownian movement*. [Mineola, United States]: Dover Publication, Inc, 1956. Citado na página 4.





- LANGEVIN, P. **Sur la théorie du mouvement brownien**. [Acad. Sci., Paris 146,]: 530, 1908. Citado na página 4.
- LEMONS, D. S.; GYTHIEL, A. **Paul Langevins 1908 paper** on the theory of brownian motion [sur la théorie du mouvement brownien, c. r. acad. sci. (paris) 146, 530533 (1908)]. *American Journal of Physics*, v. 65, n. 11, p. 1079–1081, 1997. Citado na página 4.
- LORENTZ, E. N. **Deterministic Nonperiodic Flow**. *Journal of Atmospheric Sciences*, v. 20, n. 2, p. 130 – 141, 1963. Citado na página 8.
- MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. São Paulo: Livraria da Física, 2006. Citado na página 2.
- PERRIN, M. J. **Brownian Movement and Molecular Reality**. London, England: Taylor and Francis, 1910. Citado na página 4.
- ROQUE, T. **De Andronov a Peixoto**: a noção de estabilidade estrutural e as primeiras motivações da escola brasileira de sistemas dinâmicos. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 7, n. 14, p. 233–246, 2007. Citado na página 2.
- SALINAS, S. R. A. **Einstein e a teoria do movimento browniano**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 27, n. 2, p. 263–269, 2005. Citado na página 4.
- SILVA, J. M.; LIMA, J. A. S. **Quatro abordagens do movimento browniano**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 29, n. 1, p. 25–35, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 4, 5 e 6.
- THORNTON, M. **Classical dynamics of particles and systems**. Belmont, United States: Thomson Learning, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 4.
- TOMÉ, T.; OLIVEIRA, M. J. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*. São Paulo: EDUSP, 2014. Citado na página 4.
- TRIAMBAK, S.; MAHAPATRA, D. P. **A random walk Monte Carlo simulation study of COVID-19-like infection spread**. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 574, p. 01–10, 2021. Citado na página 8.
- YAN, S.; WU, G. **Simulation of Impact of COVID-19 Pandemic on Dow Jones Index Using Random Walk**. *Association for Computing Machinery*, n. 59, p. 01–05, 2021. Citado na página 8.

©2024 by RECET. Este é um artigo de acesso livre, distribuído sob os termos e condições da licença [Creative Commons](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/) (CC BY-NC-ND 4.0).

