

SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE FLAMBAGEM DE COLUNA UTILIZANDO EQUAÇÕES DE BESSEL

dos Santos, A. * do Nascimento, P. H. R. †

Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas

Submitted: 23 mar.2020. Approved: 07 dez.2020. Published: 15 dez.2020.

Edition: 1ª. Volume: 1º.

RESUMO

Neste trabalho, fizemos uma revisão bibliográfica acerca das soluções de primeira e segunda espécies da Equação de Bessel e aplicamos em um problema da flexão de uma coluna engastada que foi modelado através de um EDO linear de segunda ordem. A solução deste problema é obtida ao transformar a EDO de segunda ordem linear em uma EDO de Bessel de ordem um e suas raízes determinam as cargas de flambagem necessárias para a análise estrutural da coluna.

Palavras-chave: EDO de Bessel, flambagem, colunas.

ABSTRACT

In this work, we performed a bibliographic review about the first and second species solutions of the Bessel Equation and applied them to a flexion problem of a set column that was modeled using a second order linear ODE. The solution to this problem is obtained by transforming the linear second order ODE into an order one Bessel ODE and its roots determine the buckling loads necessary for the structural analysis of the column.

Keywords: Bessel's ODE, buckling, columns.

Sumário

Sumário	1
Introdução	1
Equações diferenciais ordinárias	2
Funções de Bessel de primeira e segunda espécies	5
As equações de Bessel e a flambagem de uma coluna	7
Problema 1	7

Problema 2	8
Considerações Finais	10
Referências	10
APÊNDICE A O MÉTODO DE D'ALEMBERT	12

INTRODUÇÃO

As colunas são elementos lineares, tendo o seu eixo longitudinal na vertical, sendo forças axiais de compressão predominantes (ABNT, 2014). Costuma-se definir uma coluna como um componente estrutural, cujo objetivo é admitir esforços diagonais de uma construção e, assim, distribuí-los em outros componentes, como as fundações. Geralmente, os materiais que a constituem são: concreto, madeira ou aço. Ela tem o papel de sustentação de vigas que compõem uma estrutura com objetivo distribuir os esforços gerados.

As colunas são constantemente submetidas à diversos tipos de esforços e a flambagem (mudança do estado de equilíbrio estável para o instável) é um problema físico que deve ser considerado quando se quer construir edificações ou projetar um componente mecânico, por exemplo (HIBBELER, 2009). A flambagem é um fenômeno que ocorre quando uma coluna ou peça, com a área de seção transversal pequena em relação a seu comprimento, é submetido à ação de uma força compressiva. A flambagem pode ocasionar a ruptura do pilar ou peça devido à perda de estabilidade (RAFAEL, 2010). Uma das formas de evitar esse problema é aumentando a resistência, rigidez e melhorando a estabilidade da co-

*Alessandro dos Santos. Bacharel em Ciências Exatas e Tecnológicas pela Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), Brasil. E-mail: alessandrost.eng@gmail.com

†Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento. Licenciado em Matemática pela Universidade Católica do Salvador (UCSal) e Mestre em Matemática pela Universidade Federal da Bahia (UFRB). Filiação: Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas (CETEC)/ Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), Brasil. E-mail: nascimento.p@ufrb.edu.br



ISSN:
2763-8855

RECT
Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas



luna.

O surgimento das equações de Bessel se deu através do estudo feito pelo matemático suíço Daniel Bernoulli (Groningen, 8 de fevereiro de 1700 - Basileia, 17 de março de 1782) quando resolveu o problema da oscilação de uma corrente densa, suspensa verticalmente por uma de suas extremidades. A solução foi obtida utilizando o método das séries de potências em uma EDO que modelava o problema. Esse feito se deu 50 anos antes do nascimento de Bessel (OLIVEIRA E. C.; TYGEL, 2010). Posteriormente, o matemático, físico e astrônomo alemão Friedrich Wilhelm Bessel (Minden, 22 de julho de 1784 Königsberg, 17 de março de 1846) através de um estudo sistemático e apurado em 1824, desenvolveu as funções cilíndricas (funções de Bessel) as quais aplicou em problemas da matemática, física da astronomia (BEHLING, 2004).

Em meio ao contexto de descrever problemas de flambagem, é conveniente modelá-los através de equações para se encontrar uma solução. Este trabalho busca a solução de um problema de flambagem de uma coluna modelado por uma EDO Linear de Bessel para o caso da flambagem de uma coluna com seção transversal variável, de forma analítica, por meio do estudo das funções de Bessel.

Neste artigo, apresentaremos um breve estudo sobre as funções de Bessel que aparecerá como solução de um problema de flambagem de uma coluna em formato de tronco de pirâmide de base quadrangular.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Abordaremos, nessa seção, algumas definições e resultados que envolvem equações diferenciais ordinárias (EDO), que podem ser encontradas em (BOYCE W. E.; DIPRIMA, 2010), em particular, as lineares de segunda ordem e alguns métodos para encontrar soluções.

Uma equação que inclui em si as derivadas ou diferenciais de uma variável dependente, em vinculação a uma variável independente, é denominada de equação diferencial ordinária (EDO). Se a variável dependente está vinculada a mais de uma variável independente, a equação diferencial é dita parcial (EDP). A ordem de uma EDO depende da derivada de maior ordem que está contida na equação diferencial.

Formalmente, podemos escrever uma EDO de n -ésima ordem da seguinte maneira:

$$\underbrace{a_n \frac{dy^n}{dx^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y}_{\mathcal{L}(y)} = g(x), \quad (1)$$

em que $a_i = a_i(x)$, com $i = \{0, 1, \dots, n\}$ e $x \in I \subset \mathbb{R}$. O operador linear $\mathcal{L} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ em que \mathcal{F} é o espaço vetorial das funções n vezes diferenciáveis com derivadas contínuas até n -ésima ordem no corpo dos reais.

A EDO (1) é dita linear se o operador \mathcal{L} é linear na variável y . Dizemos que uma EDO é homogênea se $g(x) = 0, \forall x$. Caso contrário é dita não homogênea.

Considere a EDO linear homogênea:

$$\underbrace{a_n \frac{dy^n}{dx^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y}_{\mathcal{L}(y)} = 0. \quad (2)$$

Claramente, toda função $y = y(x)$, n vezes diferenciável, que satisfaz a Equação (2), é uma solução. Caso exista solução, geralmente ela não é única.

Seja $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ um conjunto de soluções para a EDO homogênea (2), definidas em um intervalo I . Então, a combinação linear

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x), \quad (3)$$

com constantes arbitrárias $c_i, i, n \in \mathbb{N}, i \leq n$, também é solução de (2) no intervalo I .

Se o conjunto \mathcal{Y} é linearmente independente (LI), então a combinação linear (3) é dita solução geral para a EDO (2).

Para verificar se o conjunto de soluções para a Equação (2) é LI, um resultado bastante utilizado é o dado pelo teorema a seguir:

Teorema 1. Um conjunto de soluções \mathcal{Y} é LI se, e somente se, $W(\mathcal{Y}) \neq 0, \forall x \in I$, em que

$$W(\mathcal{Y}) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

e chamado de Wronskiano.

Demonstração: ver (BUTKOV, 1988).

Definimos um problema de valor inicial (PVI) ou de Cauchy, como sendo um sistema de equações constituído por uma EDO de ordem n e $n - 1$ condições complementares (condições iniciais) que determinam, em um mesmo valor da variável independente, o valor da função incógnita e de suas derivadas até ordem $n - 1$.



Uma solução do PVI

$$\begin{cases} y^n(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{n-1}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{n-1}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \quad (4)$$

é uma função que satisfaz tanto a EDO quanto as condições iniciais.

A existência e unicidade da solução de um PVI (4) é garantida pelo seguinte resultado:

Teorema 2. *Seja y uma função de classe $C^n(\mathbb{R})$ definida em uma vizinhança do ponto x_0 . O PVI dado pelo sistema de equações (4) possui única solução.*

A demonstração do Teorema 2 é encontrada em (SOTOMAYOR T.; MANUEL, 1979).

A seguir, restringiremos o estudo ao das EDO lineares de segunda ordem, mais especificamente ao das equações de Bessel. Sua solução será encontrada através do método de Frobenius e faremos uma discussão de como encontrá-las.

Uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem é então dada por:

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x). \quad (5)$$

Para o caso em que $h(x) \neq 0$, ela é dita EDO linear de segunda ordem não homogênea, caso contrário, homogênea.

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0. \quad (6)$$

é dita a equação homogênea associada à Equação (5).

Considerando $a_2(x) \neq 0, \forall x$, e $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$, $q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$ e $g(x) = \frac{h(x)}{a_2(x)}$, temos:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x). \quad (7)$$

Segundo BOYCE W. E.; DIPRIMA (2010), o Teorema descrito a seguir, determina a solução geral da EDO (5), tal que $g(x) \neq 0$.

Teorema 3. *Se y_p uma solução particular da Equação (7) e y_1 e y_2 forem duas soluções particulares linearmente independentes da sua EDO homogênea associada, então a solução da Equação (7) é:*

$$y = y_h + y_p = k_1 y_1 + k_2 y_2 + y_p \quad (8)$$

Demonstração: Seja y a solução geral de (8) e y_p solução particular de (8) e, neste caso,

$$\frac{d^2 y_p}{dx^2} + p(x) \frac{dy_p}{dx} + q(x)y_p = g(x). \quad (9)$$

Agora, subtraindo (7) por (9), temos:

$$\frac{d^2 (y - y_p)}{dx^2} + p(x) \frac{d(y - y_p)}{dx} + q(x)(y - y_p) = 0, \quad (10)$$

que é uma EDO linear de segunda ordem homogênea cuja solução é $(y - y_p)$.

Como foi visto no Teorema 3, a solução única da Equação (10) é dada por:

$$y_h = k_1 y_1 + k_2 y_2. \quad (11)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (y - y_p) &= y_h \Rightarrow \\ y &= y_h + y_p \\ &= k_1 y_1 + k_2 y_2 + y_p, \end{aligned} \quad (12)$$

como queira demonstrar.

A solução particular da equação não homogênea y_p pode ser determinada pelo método dos coeficientes indeterminados ou pelo método da variação de parâmetros. A demonstração destes métodos podem ser encontradas em (VILLATE, 2011).

Existem alguns métodos para determinar a solução da Equação (5) e estes dependem dos coeficientes $a_i, i = \{0, 1, 2\}$. Abordaremos um que parte do pressuposto que estes coeficientes são analíticos em um intervalo real a menos de um ponto singular x_0 , os quais, geralmente, as soluções não são analíticas. A origem dessas singularidades é variada, mas podemos, em determinados casos, encontrar a solução como uma série de potências.

Segundo (TEODORO, 2007), um ponto x_0 pode ser classificado como ordinário, singular regular ou singular irregular para a EDO. Essa classificação é útil para nos indicar a natureza das soluções na vizinhança de x_0 e sugere o caminho para uma análise sistemática.

Definição 1. *Dizemos que um ponto x_0 é ordinário para a EDO (7) quando as funções $p(x)$ e $q(x)$ são analíticas em torno de x_0 , ou seja, podem ser expressas como séries de potências:*

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^n, \forall |x - x_0| < R_p, \quad (13)$$

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n, \forall |x - x_0| < R_q, \quad (14)$$



em que R_p e R_q são os respectivos raios de convergência das séries p e q .

Além disto, x_0 é um ponto singular regular se não é ordinário e as funções dadas por: $(x - x_0)p(x)$ e $(x - x_0)^2q(x)$ são analíticas em x_0 . Se x_0 é um ponto não ordinário e pelo menos uma destas funções não for analítica em x_0 , diremos que ele é um ponto singular irregular.

Para as EDO lineares de segunda ordem escritas como em (5) e cujos coeficientes são funções polinomiais, a Definição 1 pode ser reformulada da seguinte maneira:

Definição 2. Considere a Equação (5) em que $a_2(x)$, $a_1(x)$ e $a_0(x)$ são polinômios.

- (i) x_0 é um ponto singular da equação, se $a_2(x_0) = 0$;
- (ii) Um ponto singular x_0 é dito regular se existem os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$$

- (iii) Se um ponto singular não é regular, dizemos que ele é um ponto singular irregular.

Se os coeficientes da EDO são analíticos, podemos procurar uma solução analítica em torno de um ponto ordinário x_0 , ou seja, a solução pode ser representada por uma série de potências

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

em torno de x_0 . Para isto, basta achar os coeficientes da série de potências.

O Teorema de Lazarus Fuchs nos diz que podemos expressar uma solução de uma EDO escrita como série de potências, desde que estejamos expandindo em torno de um ponto ordinário ou, na pior das hipóteses, de um ponto singular regular (BUTKOV, 1988).

Teorema 4 (Fuchs). Sejam os coeficientes p e q da Equação (7) funções analíticas em torno de x_0 (ponto ordinário), então sua solução geral é também analítica em torno de x_0 , ou seja pode ser expressa por:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \quad (15)$$

em que α_1 e α_2 são constantes arbitrárias quaisquer e $y_1 = y_1(x)$ e $y_2 = y_2(x)$ são duas soluções LI em séries de potências, diante disso, é razoável pensar que se

$p(x)$ e $q(x)$ contém um ponto singular, então a solução da equação homogênea associada a (7) também tem um polo nesse ponto.

A demonstração do Teorema de Fuchs, com base em séries de potências, pode ser encontrada em (ARF-KEN G. B.; WEBER, 2001).

Através do Teorema 4 e conhecendo-se as raízes da equação indicial, quando o coeficiente do primeiro termo desta é igualado a zero, é possível saber se existe uma ou mais soluções distintas. Para o caso em que se tem duas raízes iguais, só é possível obter uma solução. Para duas raízes cuja diferença é número não inteiro, então duas soluções são encontradas. Para duas raízes cuja diferença é um número inteiro, a raiz de maior valor resultará em uma única solução (COUTINHO, 2015).

Assim é conveniente esperar que exista duas soluções para uma EDO linear de segunda ordem. Entretanto, para obtenção de uma segunda solução independente, para o caso em que as duas soluções descobertas constituírem um par LD, é necessário o desenvolvimento de outros métodos.

O resultado a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em (BUTKOV, 1988), é o método utilizado para encontrar as funções de Bessel.

Teorema 5 (Frobenius). Seja x_0 um ponto singular regular da EDO homogênea associada a (7), então existirá pelo menos uma solução da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^{n+r}, \quad (16)$$

em que r é uma constante a ser determinada, $a_0 \neq 0$. A série convergirá pelo menos em algum intervalo $0 < (x - x_0) < R$, sendo R o raio de convergência.

Assim, o método de Frobenius consiste em apresentar a solução da EDO linear de segunda ordem homogênea com coeficientes analíticos a menos de uma singularidade regular dada pela Equação (16).

Para $n = 0$, obtemos a equação indicial e, encontrada as raízes r_1 e r_2 desta equação, tem-se então duas soluções representadas por:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(n+r_1)} \\ y_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(n+r_2)} \end{aligned} \quad (17)$$

Assim, com base no Teorema 4 e a depender dos valores das raízes da equação indicial, temos que:



1. Se $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$, obtemos duas soluções linearmente independentes.
2. Se $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$, encontra-se apenas uma solução.

Segundo MATOS (2001), um método alternativo ao de Frobenius é o da redução de ordem e a solução obtida é:

$$y_2(x) = cy_1 \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{(n+r)}. \quad (18)$$

FUNÇÕES DE BESSEL DE PRIMEIRA E SEGUNDA ESPÉCIES

Nessa seção, abordaremos como encontrar uma classe de soluções gerais para um conjunto específico de EDO que se relacionam através de valor específico (ordem).

Definição 3. A equação homogênea

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (d-1)x \frac{dy}{dx} + (\lambda^2 x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (19)$$

é dita equação diferencial de Bessel de ordem $\nu \in \mathbb{R}$, dimensão d e autovalor λ .

De acordo com MESQUITA (1996), ao solucionar equações diferenciais através do método de separação de variáveis, em coordenadas cilíndricas se tem $d = 2$, para coordenadas esféricas, $d = 3$. Em coordenadas cilíndricas, quando há simetria circular, encontra-se $\nu = 0$, em outros casos, para soluções não simétricas, ν pode assumir um valor tal que $\nu \in \mathbb{R}$.

Para encontrar uma expressão que define as funções de Bessel é conveniente partirmos da Equação (19) fazendo $\lambda = 1$ e $d = 2$. Assim, temos

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (20)$$

e utilizamos o método de Frobenius para encontrar soluções na forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}. \quad (21)$$

As derivadas de primeira e segunda ordem da Equação (21) são:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \quad (22)$$

e

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}. \quad (23)$$

Substituindo (22) e (23) em (20), temos:

$$\begin{aligned} & x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} \\ & + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \\ & + (x^2 - \nu^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

A Equação (24) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} \\ & + (x^2 - \nu^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Igualando a zero o coeficiente de x^{n+r} , temos:

$$(n+r)(n+r-1) a_n + (n+r) a_n - \nu^2 a_n = 0, \quad (26)$$

ou seja,

$$a_n [n^2 + 2nr + r^2 - \nu^2] = 0. \quad (27)$$

Para $n = 0$, temos:

$$a_0 [r^2 - \nu^2] = 0. \quad (28)$$

Para $n = 1$, temos:

$$a_1 [1 + 2r + r^2 - \nu^2] = 0. \quad (29)$$

Considerando $n \geq 2$, o termo $a_n x^{n+r+2}$ pode ser reescrito como

$$a_{n-2} x^{n-2+r+2} = a_{n-2} x^{n+r}.$$

Assim, tomando novamente os coeficientes de potência mais baixa e igualando a zero, temos:

$$[(n+r)^2 - \nu^2] a_n + a_{n-2} = 0. \quad (30)$$

Da Equação (28), temos que:

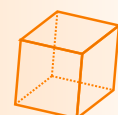
$$(r+\nu)(r-\nu) = 0, \quad (31)$$

cujas raízes são: $r_1 = \nu$ e $r_2 = -\nu$.

Iremos definir uma fórmula de recorrência para r_1 .

Costuma-se fazer a escolha:

$$a_0 = \frac{1}{2\nu\Gamma(1+\nu)}, \quad (32)$$



em que Γ representa uma função gama, sendo $\Gamma(L+1) = L\Gamma(L)$ uma de suas propriedades (OLIVEIRA E. C.; TYGEL, 2010).

A função gama é uma generalização da função fatorial e sempre representa curvas de assimetria positiva (GUIMARÃES, 2002).

Concluimos, da Equação (29), que $a_1 = 0$, uma vez que r é indefinido.

Tomando a Equação (30), explicitando a_n e fazendo $r = \nu$, podemos encontrar os próximos termos. Segue que:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)}. \quad (33)$$

Para garantir $n-2 \geq 0$, tomemos $n = 2w$. Logo:

$$a_{2w} = -\frac{a_{2w-2}}{2^2 w(w+\nu)} \quad (34)$$

Quando ν é não negativo, temos $a_1 = 0$. Mais ainda, para n ímpar ($n = 2i+1$), obtemos $a_{2i+1} = 0; \forall i \in \mathbb{N}$.

Fazendo $w = 1$ e $w = 2$ na Equação (34), temos que:

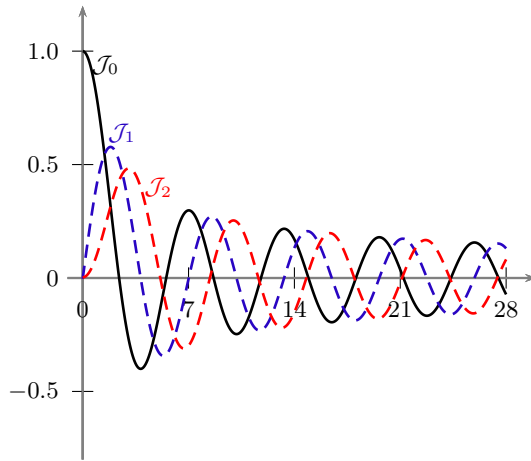
$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)} = -\frac{1}{2^{2+\nu}1!\Gamma(\nu+2)} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{2^22(\nu+2)} = -\frac{1}{2^{4+\nu}2!\Gamma(\nu+3)} \\ a_{2w} &= \frac{(-1)^w}{2^{2w+\nu}w!\Gamma(\nu+w+1)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Ao substituir os coeficientes na Equação (21), obtemos a função de Bessel de primeira espécie de índice ν :

$$\mathcal{J}_\nu(x) = x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(n+\nu+1)}. \quad (36)$$

Pelo teste da razão, esta série converge para todos os valores de x . Se $\nu \in \mathbb{Z}$, então $\mathcal{J}_\nu(x)$ é unívoca e série em (36) é de Maclaurin. Se $\nu \notin \mathbb{Z}$, então $\mathcal{J}_\nu(x)$ possuirá um ponto de ramificação na origem, cujos ramos são determinados pelos ramos de x^ν e sua quantidade pode ser finita ou infinita, respectivamente, para valores de ν racionais ou irracionais. Se fizermos ν variar continuamente, mantendo um valor de x fixo e não nulo, então $\mathcal{J}_\nu(x)$ será uma função contínua (uma série uniformemente convergente de funções contínuas) (BUTKOV, 1988).

Figura 1 – Funções de Bessel $\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_1$ e \mathcal{J}_2



Fonte: Autores usando L^AT_EX_{2 ϵ} /PSTricks.

A Figura 1 ilustra o comportamento das funções de Bessel de primeira espécie quando $\nu = 0, 1, 2$.

Substituindo ν por $-\nu$ na Equação (36), sendo $-\nu$ a segunda raiz da Equação (31), obtemos uma outra função de Bessel de primeira espécie:

$$\mathcal{J}_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n-\nu} n! \Gamma(n-\nu+1)}, \quad (37)$$

Dessa forma, \mathcal{J}_ν e $\mathcal{J}_{-\nu}$ constituem um sistema de soluções para a Equação (20), sendo $\nu \in \mathbb{R}$.

A linearidade das soluções \mathcal{J}_ν e $\mathcal{J}_{-\nu}$ pode ser verificada através do wronskiano:

$$W(\mathcal{J}_\nu, \mathcal{J}_{-\nu}) = -2 \frac{\text{sen}(\nu\pi)}{x\pi}. \quad (38)$$

Se ν não é inteiro, então $W(\mathcal{J}_\nu, \mathcal{J}_{-\nu}) \neq 0$ e \mathcal{J}_ν e $\mathcal{J}_{-\nu}$ são soluções LI da Equação (36). Caso contrário,

$$\mathcal{J}_{-\nu}(x) = (-1)^\nu \mathcal{J}_\nu(x). \quad (39)$$

Sendo assim, devemos encontrar uma outra função que constitua uma par de soluções LI para a Equação (20).

Uma vez que $y_1(x) = \mathcal{J}_\nu(x)$ é uma solução da Equação (20), uma alternativa é utilizar o método D'Alembert (Ver Apêndice A), isto é, supor que a outra solução y_2 será da forma:

$$y_2(x) = \varphi(x) \mathcal{J}_\nu(x). \quad (40)$$

Como \mathcal{J}_ν é uma solução de (20),

$$x^2 \frac{d^2 \mathcal{J}_\nu}{dx^2} + x \frac{d\mathcal{J}_\nu}{dx} + (x^2 - \nu^2) \mathcal{J}_\nu = 0. \quad (41)$$



Multiplicando (20) por \mathcal{J}_ν , (41) por y_2 e as subtraindo, temos,

$$x^2 \left[\frac{d^2 y_2}{dx^2} \mathcal{J}_\nu - \frac{d^2 \mathcal{J}_\nu}{dx^2} y_2 \right] + x \left[\frac{dy_2}{dx} \mathcal{J}_\nu - \frac{d\mathcal{J}_\nu}{dx} y_2 \right] = 0. \quad (42)$$

Dividindo a Equação (42) por x ,

$$x \left[\frac{d^2 y_2}{dx^2} \mathcal{J}_\nu - \frac{d^2 \mathcal{J}_\nu}{dx^2} y_2 \right] + \frac{dy_2}{dx} \mathcal{J}_\nu - \frac{d\mathcal{J}_\nu}{dx} y_2 = 0, \quad (43)$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx} \left[x \left(\frac{dy_2}{dx} \mathcal{J}_\nu - \frac{d\mathcal{J}_\nu}{dx} y_2 \right) \right] = 0, \quad (44)$$

implicando em

$$x \left(\frac{dy_2}{dx} \mathcal{J}_\nu - \frac{d\mathcal{J}_\nu}{dx} y_2 \right) = E \text{ (constante)}. \quad (45)$$

Dividindo (45) por $x\mathcal{J}_\nu^2$, temos:

$$\frac{\frac{dy_2}{dx} \mathcal{J}_\nu - \frac{d\mathcal{J}_\nu}{dx} y_2}{\mathcal{J}_\nu^2} = \frac{E}{x\mathcal{J}_\nu^2} \quad (46)$$

Segue que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{\mathcal{J}_\nu} \right) = \frac{E}{x\mathcal{J}_\nu^2}. \quad (47)$$

Logo,

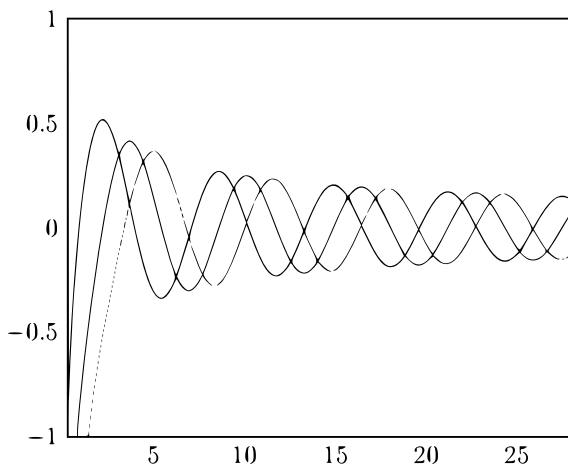
$$\frac{y_2}{\mathcal{J}_\nu} = F + E \int \frac{dx}{x\mathcal{J}_\nu^2}. \quad (48)$$

Por se tratarem de constantes quaisquer, escolhamos $F = 0$ e $E = 1$ e, obtemos

$$y_2(x) = \mathcal{J}_\nu(x) \int \underbrace{\frac{dx}{x[\mathcal{J}_\nu(x)]^2}}_{\varphi(x)}. \quad (49)$$

e, portanto, uma função de Bessel de segunda espécie ou função de Neumann, denotada por $Y_\nu(x)$, para todo $\nu \in \mathbb{R}$.

Figura 2 – Funções de Neumann Y_0 , Y_1 e Y_2



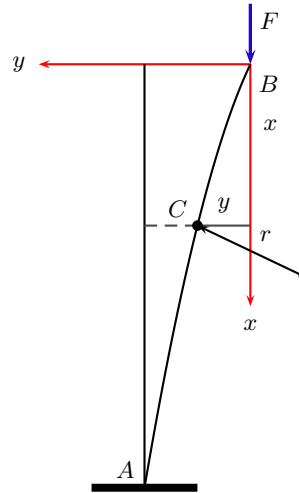
A Figura (2) ilustra o comportamento das funções de Bessel de segunda espécie quando $\nu = 0, 1, 2$.

AS EQUAÇÕES DE BESSEL E A FLAMBAGEM DE UMA COLUNA

PROBLEMA 1

Considere uma coluna AB , engastada em A e, em B , tenha sido submetida à ação de uma força F . Sejam C um ponto arbitrário da coluna e xBy um sistema cartesiano de origem em B e sentidos como representados na Figura 3.

Figura 3 – Flambagem de uma coluna



Fonte: Autores usando $\LaTeX 2_\epsilon$ /PSTricks.

O Momento Fletor de uma coluna engastada corresponde à soma algébrica dos momentos relativos à cada seção transversal da coluna no plano yx , originados por cargas aplicadas paralelamente ao eixo longitudinal x , produzindo esforço que conduz a curvatura do eixo longitudinal, ocasionando tensões normais de tração e compressão.

Devido à ação da força F , consideremos, respectivamente, os momentos externo e interno:

$$M_e = -Fy \quad (50)$$

$$M_i = \frac{EJ}{r}, \quad (51)$$

em que y representa a distância da linha neutra (ponto onde se encontra a mudança de tensão), até o eixo x , E , o módulo de elasticidade do material da coluna, J , o momento de inércia polar da área da seção transversal para ocorrer a flambagem e r é o raio de curvatura da coluna devido à flambagem. Além disso, note que os momentos externo e interno, representam, respectivamente, os momentos fletor e de inércia.

Do Cálculo Diferencial, a equação da curvatura de uma curva é dada por:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}}. \quad (52)$$

Como se considera pequenos deslocamentos quando ocorre a flambagem de uma coluna, temos

$$\frac{1}{r} \cong \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Desta forma, o valor do momento interno é

$$M_i \cong EJ \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (53)$$

O momento interno deve agir na direção oposta ao momento externo, de forma a garantir o equilíbrio do sistema, assim M_e e M_i são iguais. Portanto:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{F}{EJ}y = 0. \quad (54)$$

Como o coeficiente de y na equação (54) é uma constante positiva, podemos substituí-lo por ρ^2 , obtendo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \rho^2y = 0. \quad (55)$$

Embora seja possível encontrar, facilmente, a solução de (55) (configuração da coluna deformada), iremos obtê-la pelo método de Frobenius, da mesma forma que foi obtida a Equação (21).

Assim, derivando a Equação (21) com respeito a x , duas vezes, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} \quad (56)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}. \quad (57)$$

Substituindo (21) e (57) em (55), obtemos a seguinte expressão:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + \rho^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad (58)$$

Considerando os termos iniciais da série em (58) ($n = \{0, 1\}$), temos que os coeficientes das potências são:

$$[a_0 r(r-1)]x^{r-2} = 0 \quad (59)$$

$$[a_1 r(r+1)]x^{r-1} = 0 \quad (60)$$

Note que $a_1 = a_0 = 0$ não interessa, pois todos os demais coeficientes da série (58) seriam iguais a zero e $y(x) = 0$ é solução trivial. Portanto, para encontrarmos uma solução da EDO (55), os coeficientes a_0 e a_1 devem continuar arbitrários e $r = 0$.

Para $n \geq 2$ e $r = 0$, podemos reescrever a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

como

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

e os coeficientes de x^n , satisfazendo a condição de que são todos nulos fica:

$$a_{n+2} = -\rho^2 \frac{a_n}{(n+2)(n+1)}. \quad (61)$$

Assim, a solução resulta em:

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \left(1 - \frac{\rho^2 x^2}{2!} + \frac{\rho^4 x^4}{4!} - \frac{\rho^6 x^6}{6!} + \dots \right) \\ &+ \frac{a_1}{\rho} \left(\rho x - \frac{\rho^3 x^3}{3!} + \frac{\rho^5 x^5}{5!} - \dots \right) \\ &= A \text{sen}(\rho x) + B \text{cos}(\rho x) \end{aligned} \quad (62)$$

em que as parcelas que multiplicam os termos a_0 e $\frac{a_1}{\rho}$ representam os desenvolvimentos da série de Taylor de $\text{sen}(\rho x)$ e $\text{cos}(\rho x)$, respectivamente, e as constantes A e B determinadas se conhecidas as condições iniciais e as de contorno.

A solução (62) do problema proposto nos conduziu, dentro da simplificação imposta (53), à curva elástica $y(x)$ da deformação da coluna com carga F aplicada no topo. Além disso, se tivermos outros tipos de carregamento, curvas distintas seriam obtidas.

PROBLEMA 2

Considere, agora, uma coluna cuja linha neutra possui extremidades nos pontos A e B , de seção transversal variável e altura h , sendo a sua espessura e constante, submetido à uma força axial de compressão F em B . Além disso, um sistema cartesiano ortogonal (y, x) , com origem em $B(0, b)$ e sentidos dados na Figura 4.

Já que a situação do Problema 1, na Seção , retrata o caso genérico da flambagem, então podemos utilizar, a Equação (54) para este caso.

Uma vez que:

$$J = J_b + Cx = J_b \left(1 + \frac{Cx}{J_b} \right), \quad (63)$$

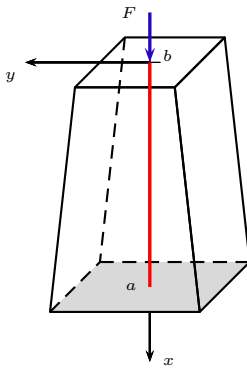
em que J representa o momento de inércia polar da coluna na seção paralela que dista x da seção em B , J_b , o



momento de inércia polar da seção transversal em B e a parcela Cx descreve a variação do momento de inércia polar J ao longo de x . A constante C relaciona os momentos de inércia polar das seções do pilar:

$$C = \frac{J_a - J_b}{a - b}.$$

Figura 4 – Coluna de largura variável, espessura e e solidada por uma força F



Fonte: Autores usando L^AT_EX 2_ε/PSTricks.

Substituindo J na Equação (54), temos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{F}{EJ_b \left(1 + \frac{Cx}{J_b}\right)} y = 0. \quad (64)$$

É importante aplicarmos mudança de variável na EDO (64). Assim, tomaremos um formato mais harmonioso dessa equação para então encontrarmos a solução da mesma.

Tomaremos

$$t = 1 + \frac{Cx}{J_b}. \quad (65)$$

Substituindo (65) em (64), obtemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{F}{EJ_b t} y = 0. \quad (66)$$

Derivando (65) com respeito a x , temos:

$$dt = \frac{C}{J_b} dx \quad (67)$$

Segue que:

$$\frac{1}{dx} = \frac{C}{J_b} \frac{1}{dt} \quad (68)$$

e, conseqüentemente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C}{J_b} \frac{dy}{dt}. \quad (69)$$

Derivando a Equação (69) com respeito à variável x , temos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{C}{J_b} \frac{d^2y}{dx dt} = \frac{C}{J_b} \frac{d}{dt} \left[\frac{dy}{dx} \right]. \quad (70)$$

Substituindo (69) em (70), temos,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{C}{J_b} \frac{d}{dt} \left[\frac{C}{J_b} \frac{dy}{dt} \right] = \frac{C^2}{J_b^2} \frac{d^2y}{dt^2}. \quad (71)$$

Substituindo (71) em (66), temos,

$$\frac{C^2}{J_b^2} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{F}{EJ_b t} y = 0 \quad (72)$$

e multiplicando a Equação (72) por $\left(\frac{J_b^2}{C^2}\right)$,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{FJ_b}{C^2 E t} y = 0. \quad (73)$$

Como o coeficiente de $\frac{y}{t}$ é uma constante positiva, podemos escrever:

$$\frac{FJ_b}{C^2 E} = \kappa^2 \quad (74)$$

e assim,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\kappa^2}{t} y = 0. \quad (75)$$

Note que a EDO (75) não é uma Bessel e, assim, é preciso realizar a seguinte mudanças de variável:

$$u = 2\kappa t^{\frac{1}{2}} \quad (76)$$

$$y = z t^{\frac{1}{2}} \quad (77)$$

sendo $z = z(u)$ a solução da equação que será obtida.

Derivando as equações (76) e (77) com respeito as variáveis t e u , respectivamente, obtemos:

$$\frac{du}{dt} = \kappa t^{-\frac{1}{2}} \quad (78)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{du} \frac{du}{dt} t^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} z t^{-\frac{1}{2}}. \quad (79)$$

Substituindo a Equação (78) na (79), temos:

$$\frac{dy}{dt} = \kappa \frac{dz}{du} + \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} z. \quad (80)$$

A derivada da Equação (80) com respeito à variável t é:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \kappa \frac{d^2z}{dt du} + \frac{dz}{du} \frac{du}{dt} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{2}} z \quad (81)$$

Substituindo (78) em (81), temos:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \kappa \frac{d}{du} \left(\frac{dz}{dt} \right) + \frac{dz}{du} \left(\frac{1}{2} \kappa t^{-1} \right) - \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{2}} z \quad (82)$$

Da Equação (76), podemos obter:

$$\frac{dz}{dt} = \kappa t^{-\frac{1}{2}} \frac{dz}{du}. \quad (83)$$

Substituindo (83) em (82), obtemos:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \kappa^2 \frac{d^2z}{du^2} t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{dz}{du} \kappa t^{-1} - \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{2}} z \quad (84)$$



Isolando o termo t na Equação (76), temos:

$$t = \frac{u^2}{4\kappa^2} \quad (85)$$

Substituindo a Equação (85) na Equação (84), obtemos:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{2\kappa^3}{u} \frac{d^2 z}{du^2} + \frac{2\kappa^3}{u^2} \frac{dz}{du} - \frac{2\kappa^3}{u^3} z \quad (86)$$

Substituindo as Equações (86), (85) e (77) na Equação (75):

$$\frac{d^2 z}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dz}{du} + \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) z = 0 \quad (87)$$

que é uma EDO de Bessel de parâmetro $\nu = 1$.

Portanto, a solução geral da EDO (87) é dada por:

$$z = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = \alpha_1 \mathcal{J}_1(u) + \alpha_2 Y_1(u), \quad (88)$$

em que α_1 e α_2 são constantes que são definidas com base nas condições de contorno as quais possuem o problema particular em estudo. Note que, quando u se aproxima de zero, a parcela $Y_1(u)$ tende para o infinito e, conseqüentemente, valores muito altos de z não equivalem ao problema físico. Sendo assim, tomemos $\alpha_2 = 0$ e a solução da EDO (87) é:

$$z(u) = \alpha_1 \mathcal{J}_1(u) \quad (89)$$

ou ainda,

$$y(x) = \alpha_1 \left(1 + \frac{Cx}{J_b}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{J}_1 \left[2\kappa \left(1 + \frac{Cx}{J_b}\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \quad (90)$$

Usando as condições iniciais, teremos:

$$\alpha_1 \mathcal{J}_1(2\kappa) = 0. \quad (91)$$

Dentre as raízes dessa equação, a que nos interessa é a primeira (obtida em (CASIO, 2018)). Assim, temos:

$$2\kappa = 3,83171 \Rightarrow \kappa = 1,915855$$

e, da Equação (74), a primeira carga de flambagem é dada por:

$$F = E \frac{(J_a - J_b)^2}{J_b (a - b)^2} \kappa^2.$$

As demais raízes de \mathcal{J}_1 resultam em as outras cargas de flambagem as quais não temos interesse.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vimos que a modelagem de um problema de flambagem de uma coluna reta cujas seções transversais são quadrados de medidas de área distintas, pode ser feita através da EDO linear de segunda ordem homogênea e, por uma mudança de variável, essa EDO foi transformada numa equação de Bessel cujas soluções foram facilmente encontradas e, em seguida, determinadas as cargas de flambagem através da solução analítica (90) da Equação (64), onde podemos verificar as condições de estabilidade da coluna, uma vez que é possível determinar as várias cargas de flambagem onde não ocorre ruptura.

Referências

ARFKEN G. B.; WEBER, H. J. **Mathematical methods for Physicists**. [S.l.]: Harcourt/Academic Press, 2001. Citado na página 4.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **6118: Projeto de Estruturas de Concreto- Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014. Citado na página 1.

BEHLING, R. **A equação de Kepler por Bessel e Fourier**. 2004. Disponível em: <<http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/96666>>. Acesso em: 21.08.2019. Citado na página 2.

BOYCE W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.

BUTKOV, E. **Física matemática**. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos, 1988. 136-295-360 p. ISBN 9788521611455. Citado 3 vezes nas páginas 2, 4 e 6.

CASIO, L. **Kesian Casio**. 2018. Disponível em: <<http://keisan.casio.com/>>. Acesso em: 15.03.2018. Citado na página 10.

COUTINHO, S. **Métodos matemáticos para física 2**. [S.l.]: UFPE, Recife, 2015. Citado na página 4.

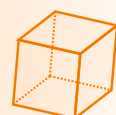
GUIMARÃES, D. P. **Uma função hiperbólica de distribuição probabilística de alta flexibilidade**. *Embrapa Cerrados-Documentos (INFOTECA-E)*, Planaltina, DF: Embrapa Cerrados., 2002. Citado na página 6.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. [S.l.]: Pearson Education, Inc., 2009. Citado na página 1.

MATOS, P. M. **Séries e Equações Diferenciais**. São Paulo: Prentice Hall, 2001. Citado na página 5.

MESQUITA, A. F. **A Equação de Bessel**. 1996. Disponível em: <<http://www.ecientificocultural.com/ECC3/bessel00.htm>>. Acesso em: 20.02.2018. Citado na página 5.

OLIVEIRA E. C.; TYGEL, M. **Métodos matemáticos para Engenharia**. Rio de Janeiro: SBM, 2010. ISBN 85-85818-24-7. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 6.



RAFAEL, C. S. . **Otimização de estruturas por algoritmos genéticos submetidas a restrições de flexibilidade e flambagem**. 2010. Citado na página 1.

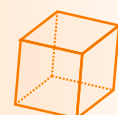
SOTOMAYOR T.;MANUEL, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA (Projeto Euclides), 1979. Citado na página 3.

TEODORO, W. L. **Soluções por séries e funções especiais**. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 2007. Citado na página 3.

VILLATE, J. E. **Equações diferenciais e equações de diferenças**. 2011. Citado na página 3.



RECT
Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas



APÊNDICE A – O MÉTODO DE D’ALEMBERT

A seguir, mostraremos que, conhecendo uma solução y_1 para a EDO homogênea associada à Equação (7) é possível encontrar uma segunda solução y_2 que forma um par com y_1 linearmente independente.

Considere, portanto, as seguintes equações:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + p(x) \frac{dy_1}{dx} + q(x) y_1 = 0 \quad (92)$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + p(x) \frac{dy_2}{dx} + q(x) y_2 = 0, \quad (93)$$

em que y_1 é uma solução conhecida da EDO homogênea associada à EDO (7) e y_2 uma solução desconhecida e que forma um par LI com y_1 .

O wronskiano dessas soluções é:

$$W(y_1, y_2) = y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx}. \quad (94)$$

Segue que

$$\frac{dW}{dx}(y_1, y_2) = y_1 \frac{d^2 y_2}{dx^2} - \frac{d^2 y_1}{dx^2} y_2. \quad (95)$$

Multiplicando a Equação (92) por $-y_2$ e a Equação (93) por y_1 , a soma destas equações é:

$$y_1 \frac{d^2 y_2}{dx^2} - y_2 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + p(x) (y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx}) = 0. \quad (96)$$

ou ainda,

$$\frac{dW}{dx}(x) + p(x)W(x) = 0. \quad (97)$$

Separando as variáveis

$$\frac{dW(x)}{W(x)} = -p(x)dx. \quad (98)$$

Integrando a Equação (98) (com respeito à variável x em intervalo a a x), temos :

$$W(x) = W(a) \exp \left[- \int_a^x p(\varphi) d\varphi \right]. \quad (99)$$

Como

$$W(y_1, y_2) = y_1^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right), \quad (100)$$

segue que:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = W(a) \frac{\exp \left[- \int_a^x p(\varphi) d\varphi \right]}{y_1^2} \quad (101)$$

Integrando a Equação (101), temos:

$$y_2 = y_1 W(a) \int_a^x \frac{\exp \left[- \int_a^\tau p(\varphi) d\varphi \right]}{[y_1(\tau)]^2} d\tau \quad (102)$$

Sendo a uma constante, segue que y_2 é uma solução linearmente independente de y_1 . Visto que $W(a)$ é uma constante e que a solução sempre vem acompanhada de um fator normalizador incógnito, pode-se considerar $W(a) = 1$. Portanto:

$$y_2(x) = y_1(x) \int_a^x \frac{\exp \left[- \int_a^\tau p(\varphi) d\varphi \right]}{[y_1(\tau)]^2} d\tau. \quad (103)$$

