

# NOVAS SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO $KdV$ EM $(2 + 1)$ -DIMENSÕES

Cruz, K. G. \*

De melo, G. R. †

Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas

Submitted: 30 set.2019. Approved: 09 dez.2019. Published: 15 dez.2020.

Edition: 1<sup>a</sup>. Volume: 1<sup>o</sup>.

## RESUMO

Neste trabalho, estudaremos soluções sólitons da equação  $KdV$  em  $(2 + 1)$  dimensões através do método de Hirota. Soluções sólitons, dromions e solitoff são estudadas, bem como a interação entre dromions e solitoffs.

**Palavras-chave:** sólitons, Método de Hirota, estruturas coerentes em  $(2 + 1)$  dimensões.

## ABSTRACT

In this work, we will study Solitons solutions of the  $KdV$  equation in  $(2 + 1)$ -dimensions using the Hirota method. Solutions solitons, dromions and solitoff are studied, as well as the interaction between dromions and solitoffs.

**Keywords:** Solitons, Hirota Method, Coherent structures in  $(2 + 1)$ -dimensions.

## Sumário

Sumário	1
Introdução	1
A equação $KdV$ em $(1 + 1)$ -dimensões	2
A equação $KdV$ em $(2 + 1)$ -dimensões	4
Sólitons linha	4
Solução tipo Dromion	7
Solução tipo Solitoff	7
Interação Dromion Solitoff	7
Conclusão	9

Referências	9
-------------	---

## INTRODUÇÃO

Desde a primeira observação consciente do fenômeno solitônico, realizada por Jonh Scott Russel (1808-1882) no canal de Edinburgh-Glasgow, em 1843, o estudo dos sólitons tem atraído a atenção de diversos pesquisadores utilizando as mais variadas abordagens científicas, como por exemplo métodos numéricos, métodos geométricos, métodos algébricos, métodos analíticos, etc.. O principal motivo de tão variadas abordagens utilizadas, deve-se ao fato dos fenômenos solitônicos possuírem aplicações nas mais variadas áreas das ciências (ver (DRAZIN et al., 1989; ZABUSKY; KRUSKAL, 1965; REMOISSENET, 1999; RAJARAMAN, 1982; GOMES; MELO; ZIMERMANN, 2009; DAS, 1989; FERMI; J.; ULAM, 1965; TODA, 1989; MIURA; GARDNER; KRUSKAL, 1968; CHALUB; ZUBELLI, 2001)).

Neste texto, entendemos os sólitons como ondas não lineares com as seguintes propriedades:

1. É uma onda localizada que se propaga sem mudança de forma e velocidade; †
2. São ondas estáveis mesmo após sua interação com outros sólitons.

Importante observar que as ondas não lineares são soluções especiais de equações diferenciais não lineares. Neste ponto, convém chamar atenção ao fato

\*Karine Gomes Cruz é estudante do curso de Bacharelado em Ciências Exatas e Tecnológicas da UFRB. Atualmente participa do programa de Iniciação Científica, (PIBIC-UFRB) e pesquisa sobre soluções sólitons de Equações diferenciais não-lineares e método de Hirota. [karinecruz000@gmail.com](mailto:karinecruz000@gmail.com)

†Genilson Ribeiro de Melo. Possui graduação em Bacharelado em Física pela Universidade Federal da Bahia (2000), mestrado em Física pela Universidade Federal da Bahia (2004) e doutorado em Física pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2009). Atualmente é professor Adjunto da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Tem experiência na área de Física, com ênfase em Física Matemática e Física de Partículas e Campos, atuando principalmente nos seguintes temas: Equações diferenciais não-lineares, Sólitons, Covariância Galileana, teoria clássica de campos e equação de Duffin-Kemmer-Petiau. [gmelo@ufrb.edu.br](mailto:gmelo@ufrb.edu.br)



ISSN:  
2763-8855

REECT  
Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas



que equações diferenciais não lineares não obedecem ao princípio de superposição e não possuem um método geral de solução (Em analogia as irmãs lineares). Desta maneira, para obtermos as soluções sólitons, usaremos o *método de Hirota*. Este método foi introduzido na década de 60 pelo pesquisador Hyogo Hirota e de forma simplificada pode ser entendido nos dois passos a seguir (HIROTA, 1980):

1. Defina uma mudança de variável cuja finalidade é transformar a equação diferencial não linear sob estudo em outra equação, a chamada equação bilinear;
2. Expanda a nova variável em série de potências em um parâmetro  $\epsilon$ . Cada potência de  $\epsilon$  irá resultar numa solução sóliton.

Pela simplicidade dos passos fundamentais elencados acima, o método de Hirota é também conhecido com método direto. Uma vantagem deste método é a possibilidade de sua utilização para obtermos novas generalizações de equações integráveis (HIETARINTA, 1987a), (HIETARINTA, 1987b), (HIETARINTA, 1987c) e (HIETARINTA, 1987d).

Este artigo será dividido da seguinte forma: Na seção 1, estudaremos a equação  $KdV$  em  $(1 + 1)$ -dimensões e suas soluções sólitons; Na seção 2, estudaremos uma interessante generalização da equação  $KdV$  em  $(2 + 1)$ -dimensões e apresentaremos suas soluções sólitons, bem como outras estruturas coerentes que surgem no contexto de  $(2 + 1)$ -dimensões; Na seção 3, apresentaremos nossas conclusões e perspectivas.

## A EQUAÇÃO $KdV$ EM $(1 + 1)$ -DIMENSÕES

A equação de Korteweg de Vries (equação  $KdV$ ) é dada por:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

onde  $u = u(x, t)$  e os sub-índices indicam derivadas parciais. Esta equação é usada na modelagem de ondas em águas rasas e foi introduzida por D. J. Korteweg e G. de Vries (ver (KORTEWEG; VRIES, 1985)) para resolver teoricamente a observação feita por Jonh Scott Russel no canal de Edinburg-Glasgow, em 1843, isto é, a equação  $KdV$  pode ser associada ao problema físico de ondas propagando-se num canal raso. Para resolvermos a equação  $KdV$ , utilizaremos a mudança de variável,

$$u = -2[\ln(f)]_{xx}. \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$f_{xt}f - f_x f_t + 3f_{xx}^2 + f_{xxxx}f - 4f_{xxx}f_x = 0. \quad (3)$$

A equação (3) pode ser reescrita como,

$$D_x(D_t + D_x^3)f \cdot f = 0, \quad (4)$$

onde  $D_i$  é chamado de operador bilinear, cuja definição é dada por:

$$D_x^m D_t^n (a \cdot b) = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^n a(x, t) b(x', t') \Bigg|_{\substack{x=x' \\ t=t'}}$$

A equação (4) é chamada de forma bilinear da equação  $KdV$  e constitui o primeiro passo do formalismo de Hirota. O próximo passo é utilizar a expansão,

$$f(x, t) = \sum_{i=0}^n \epsilon^i f_i(x, t) = 1 + \epsilon^1 f_1(x, t) + \epsilon^2 f_2(x, t) + \dots, \quad (6)$$

onde  $f_0 = 1$ . Substituindo (6) em (4) e igualando os coeficientes de  $\epsilon^n$  a zero, obtemos o conjunto de equações:

$$D_x(D_t + D_x^3)(1 \cdot 1) = 0 \quad (7)$$

$$D_x(D_t + D_x^3)(1 \cdot f_1 + f_1 \cdot 1) = 0, \quad (8)$$

$$D_x(D_t + D_x^3)(1 \cdot f_2 + f_1 \cdot f_1 + f_2 \cdot 1) = 0, \quad (9)$$

⋮

$$D_x(D_t + D_x^3) \sum_{m=0}^N (f_{N-m} \cdot f_m) = 0. \quad (10)$$

As equações (7)- (10) possuem graus, respectivamente, iguais a  $\epsilon^0, \epsilon^1, \epsilon^2, \dots, \epsilon^N$ .

É importante observar que a equação de grau um pode ser reescrita na sua forma diferencial como:

$$f_1(x, t)_{xt} + f_1(x, t)_{xxxx} = 0, \text{ grau } \epsilon^1. \quad (11)$$

Isto é, uma equação linear!

Agora, estamos em posição de encontrar as soluções sólitons do modelo. Uma possível solução da equação (11) é

$$f_1(x, t) = e^{k_1 x + \omega_1 t}. \quad (12)$$

Substituindo a equação (12) na (11), encontramos  $\omega_1 = -k_1^3$ . Logo, a solução 1-sóliton é dada por:

$$u = -2[\ln(1 + \rho_1)]_{xx}, \quad (13)$$

onde

$$\rho_1 = 1 + e^{k_1 x - k_1^3 t}. \quad (14)$$

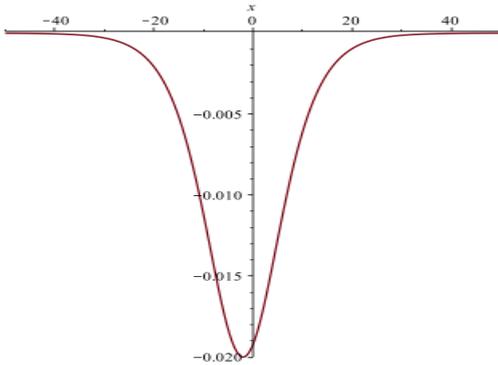


De fato, podemos reescrever a solução (13) na celebrada forma da solução 1-sóliton da equação  $KdV$ :

$$u = -2k_1^2 \operatorname{sech}^2(k_1x - 4k_1^3t). \quad (15)$$

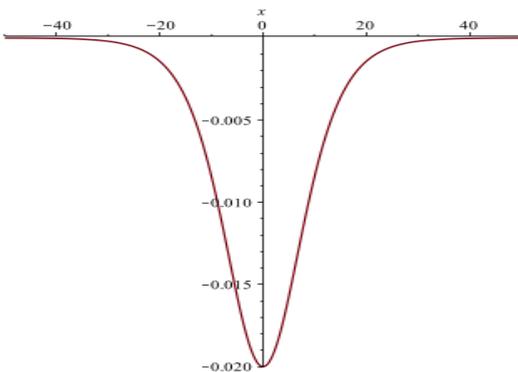
As figuras 1, 2 e 3 apresentam gráficos da solução 1-sóliton com  $k_1 = 0, 4$ .

Figura 1 – Solução 1-sóliton  $t = -50$



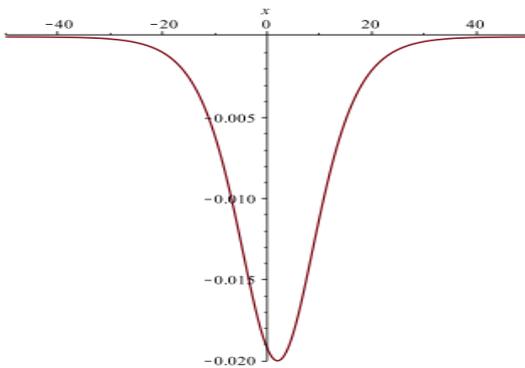
Fonte: Figura elaborada pelo autor

Figura 2 – Solução 1-sóliton  $t = 0$



Fonte: Figura elaborada pelo autor

Figura 3 – Solução 1-sóliton  $t = 50$



Fonte: Figura elaborada pelo autor

Vale a pena destacar, na solução (16), que a amplitude da solução 1-sóliton depende do parâmetro  $k$ , a velocidade do sóliton, isto é, sóltons mais altos viajam mais depressa!

Para encontrarmos a solução 2-sóltons, nós precisamos, novamente, resolver o conjunto de equações (7)- (11).

Outra possível solução da equação (11) é:

$$f_1(x, t) = \rho_1 + \rho_2, \quad (16)$$

onde  $\rho_i = 1 + e^{k_i x - \omega_i^3 t}$  e  $\omega_i = -k_i^3$ . Entretanto, agora, teremos que resolver a equação para  $\epsilon^2$ , cuja solução é dada por:

$$f_2(x, t) = a_{12} \rho_1 \rho_2, \quad (17)$$

com

$$a_{12} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}. \quad (18)$$

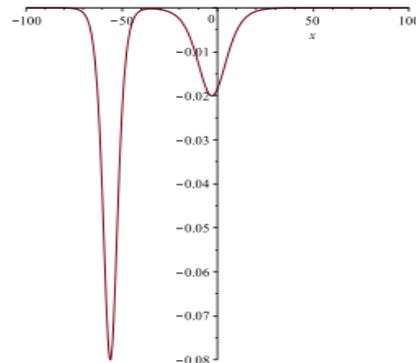
Desta forma, a solução 2-sóltons é dada por

$$u = -2[\ln(1 + \rho_1 + \rho_2 + a_{12} \rho_1 \rho_2)]_{xx}. \quad (19)$$

O termo  $a_{12}$  é responsável pela interações entre os sóltons.

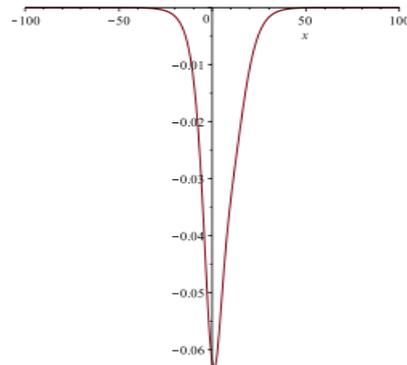
As figuras 4, 5 e 6 apresentam gráficos da solução 2-sóltons com  $k_1 = 0, 2$  e  $k_2 = 0, 4$ .

Figura 4 – Solução 2-sóltons  $t = -350$



Fonte: Figura elaborada pelo autor

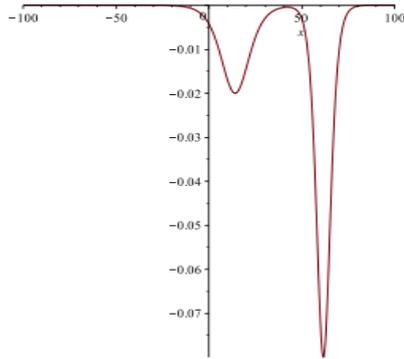
Figura 5 – Solução 2-sóltons  $t = 0$



Fonte: Figura elaborada pelo autor



Figura 6 – Solução 2-sólitons  $t = 350$



Fonte: Figura elaborada pelo autor

Observe que o sólíton mais alto ultrapassa o mais baixo. De maneira similar, devemos resolver o conjunto de equações (7)-(11) para encontrar a solução 3-sólitons. Neste caso, teremos a solução:

$$f(x, t) = 1 + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + a_{12}\rho_1\rho_2 + a_{13}\rho_1\rho_3 + a_{23}\rho_2\rho_3 + a_{123}\rho_1\rho_2\rho_3, \quad (20)$$

com

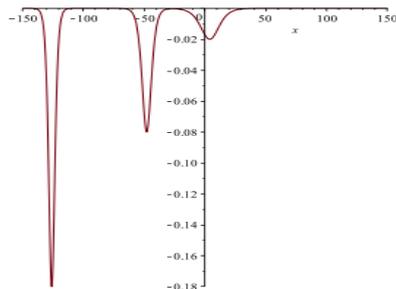
$$a_{ij} = \frac{(k_i - k_j)^2}{(k_i + k_j)^2}, \quad (21)$$

$$\rho_i = 1 + e^{k_i x - k_i^3 t}, \quad (22)$$

$$a_{123} = a_{12}a_{13}a_{23}. \quad (23)$$

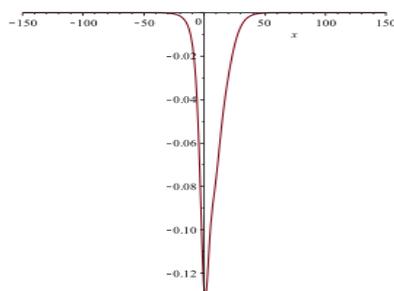
As figuras 7, 8 e 9 apresentam gráficos da solução 3-sólitons com  $k_1 = 0, 2, k_2 = 0, 4$  e  $k_3 = 0, 6$ .

Figura 7 – Solução 3-sólitons  $t = -350$



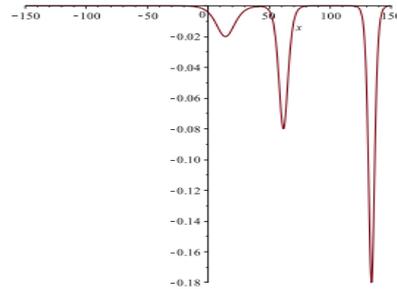
Fonte: Figura elaborada pelo autor

Figura 8 – Solução 3-sólitons  $t = 0$



Fonte: Figura elaborada pelo autor

Figura 9 – Solução 3-sólitons  $t = 350$



Fonte: Figura elaborada pelo autor

## A EQUAÇÃO $KdV$ EM $(2 + 1)$ -DIMENSÕES

Nesta seção, estudaremos os sólítons em  $(2+1)$ -dimensões. Para isso, estudaremos uma generalização da equação  $KdV$  para  $(2 + 1)$ -dimensões, a equação de Nizhnik–Novikov–Veselov em  $(2+1)$ -dimensões (BOITI et al., 1986). Para isso, tomaremos como ponto de partida a forma bilinear da equação  $KdV$  em  $(1 + 1)$ - dimensões obtida na seção anterior, equação (4):

$$D_x(D_t + D_x^3)f \cdot f = 0. \quad (24)$$

A nova equação será obtida realizando a permuta do primeiro  $D_x$  por  $D_y$ , o que resulta

$$D_y(D_t + D_x^3) \cdot f \cdot f = 0. \quad (25)$$

Sua forma diferencial pode ser obtida admitindo-se o campo físico

$$u = -2[\ln(f)]_{xy}. \quad (26)$$

Substituindo-se (26) em (25) e após algumas manipulações, obtemos a forma diferencial da equação (27):

$$u_t + u_{xxx} = 3(u\partial_y^{-1}u_x)_x. \quad (27)$$

Observe que ao fazer  $x = y$ , a equação (27) se reduz a equação (1), justificando sua alcunha de equação  $KdV$  em  $(2 + 1)$ -dimensões. Fenômenos com estruturas localizadas em  $(2 + 1)$ -dimensões são bem mais ricos que em  $(1 + 1)$ -dimensões.

Nas próximas subseções estudaremos algumas estruturas localizadas em  $(2 + 1)$ -dimensões tendo como ponto de partida a definição de sólítons apresentadas na introdução deste texto.

### Sólítons linha

Uma extensão natural da estrutura solitônica apresentada  $(1 + 1)$ -dimensão são os sólítons linhas da-



dos pela expansão:

$$f(x, y, t) = \sum_{i=0}^n \epsilon^i f_i = 1 + \epsilon^1 f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3 + \dots \quad (28)$$

De maneira similar ao caso unidimensional, substituiremos a equação (28) em (25) e igualaremos os coeficientes de  $\epsilon^n$  a zero, obtendo o conjunto de equações:

$$D_y(D_t + D_x^3) \cdot 1 \cdot 1 = 0, \quad (29)$$

$$D_y(D_t + D_x^3) \cdot (1 \cdot f_1 + f_1 \cdot 1) = 0, \quad (30)$$

$$D_y(D_t + D_x^3) \cdot (1 \cdot f_2 + f_1 \cdot f_1 + f_2 \cdot 1) = 0, \quad (31)$$

⋮

$$D_y(D_t + D_x^3) \sum_{m=0}^N (f_{N-m} \cdot f_m) = 0. \quad (32)$$

As equações (29)- (32) possuem graus, respectivamente, iguais a  $\epsilon^0, \epsilon^1, \epsilon^2, \dots, \epsilon^N$ .

A equação de grau um pode ser reescrita na forma diferencial como:

$$f_1(x, y, t)_{yt} + f_1(x, y, t)_{yxxx} = 0, \text{ grau } \epsilon^1. \quad (33)$$

Novamente uma equação linear! Desta maneira, teremos as soluções:

- Solução 1 sólton linha

$$f = 1 + f_1(x, y, t), \quad (34)$$

onde

$$f_1(x, y, t) = \rho_1. \quad (35)$$

- Solução 2 sólitons linha

$$f = 1 + f_1(x, y, t) + f_2(x, y, t), \quad (36)$$

onde

$$f_1(x, y, t) = \rho_1 + \rho_2, \quad (37)$$

$$f_2(x, y, t) = a_{12}\rho_1\rho_2. \quad (38)$$

- Solução 3 sólton linha

$$f = 1 + f_1(x, y, t) + f_2(x, y, t) + f_3(x, y, t). \quad (39)$$

onde

$$f_1(x, y, t) = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3, \quad (40)$$

$$f_2(x, y, t) = a_{12}\rho_1\rho_2 + a_{13}\rho_1\rho_3 + a_{23}\rho_2\rho_3, \quad (41)$$

$$f_3(x, y, t) = a_{123}\rho_1\rho_2\rho_3. \quad (42)$$

Nas soluções (40), (41) e (42), temos:

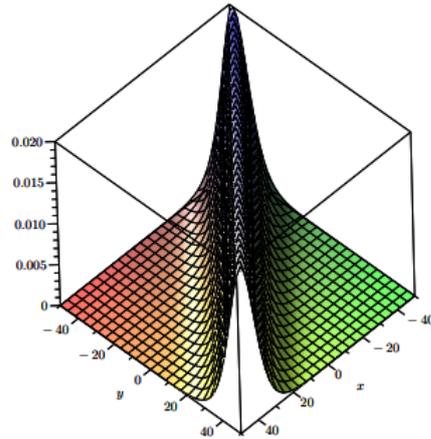
$$a_{ij} = \frac{(k_i - k_j)(l_i - l_j)}{(l_i + l_j)(k_i + k_j)}, \quad (43)$$

$$\rho_i = 1 + e^{k_i x + l_i y - k_i^3 t}, \quad (44)$$

$$a_{123} = a_{12}a_{13}a_{23}. \quad (45)$$

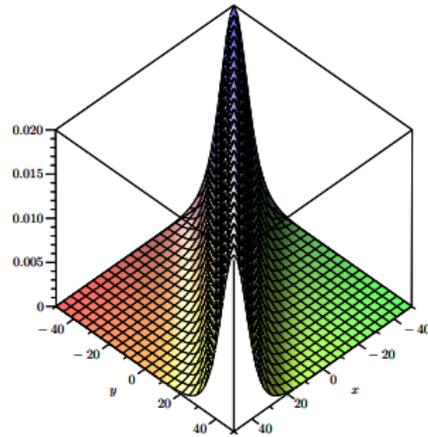
As figuras 10, 11, 12, 13, 14 e 15 apresentam gráficos das soluções sólitons linha  $u = -2[\ln(f)]_{xy}$ .

Figura 10 – 1-sólton linha  $t = -50$



Fonte: Figura elaborada pelo autor

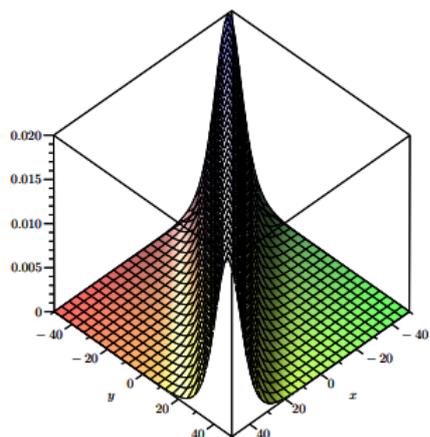
Figura 11 – 1-sólton linha  $t = 0$



Fonte: Figura elaborada pelo autor

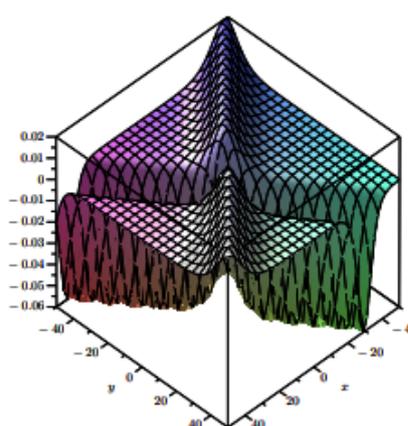


Figura 12 – 1 sóliton linha  $t = 50$



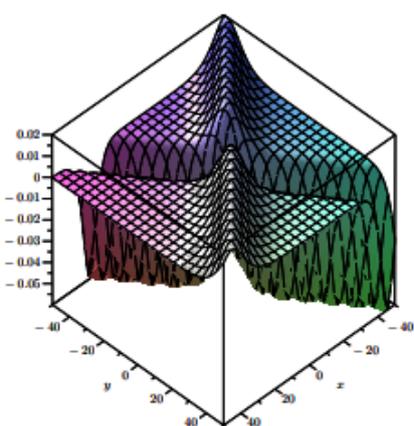
Fonte: Figura elaborada pelo autor

Figura 15 – 2 sólitons linha  $t = 50$



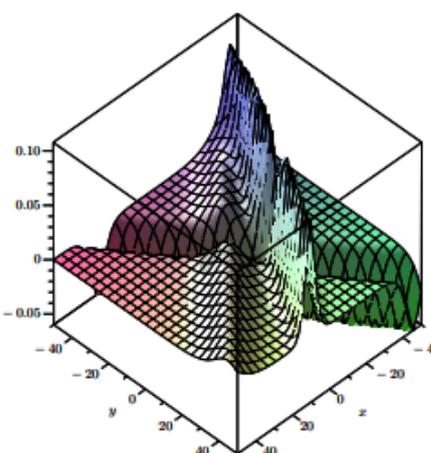
Fonte: Figura elaborada pelo autor

Figura 13 – 2 sólitons linha  $t = -50$



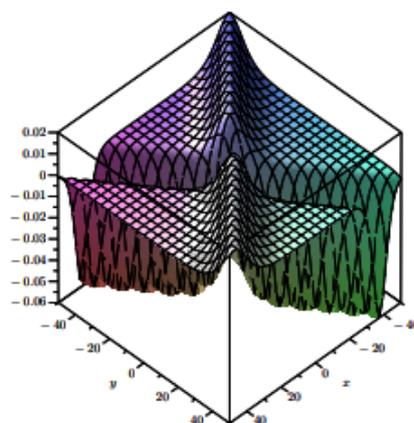
Fonte: Figura elaborada pelo autor

Figura 16 – 3 sólitons linha  $t = -50$



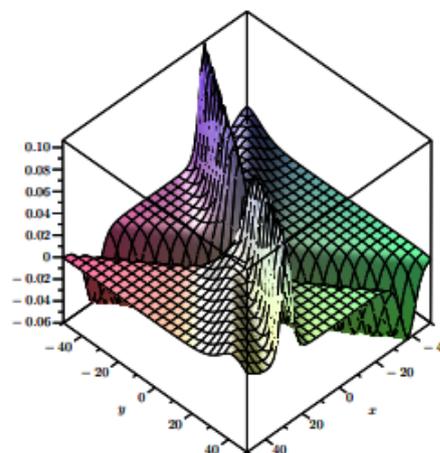
Fonte: Figura elaborada pelo autor

Figura 14 – 2 sólitons linha  $t = 0$



Fonte: Figura elaborada pelo autor

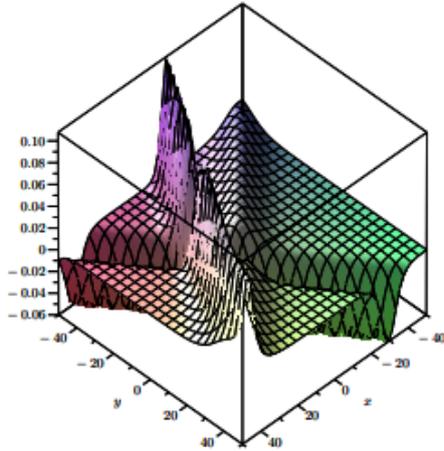
Figura 17 – 3 sólitons linha  $t = 0$



Fonte: Figura elaborada pelo autor



Figura 18 – 3-sólitons linha  $t = 50$



Fonte: Figura elaborada pelo autor

As figuras 16, 17 e 18, temos  $k_1 = 0, 2, k_2 = 0, 4, k_3 = 0, 6, l_1 = -0, 2, l_2 = 0, 3$  e  $l_3 = -0, 36$ .

#### Solução tipo Dromion

Uma interessante estrutura coerente é a chamada solução tipo dromion (ver (HIETARINTA, 1990) e (RADHA R.; LAKSHMANAN, 1994)). Tais soluções são obtidas utilizando as funções:

$$f_1(x, y, t) = e^{k_1 x + \omega_1 t} + e^{l_1 y}, \quad (46)$$

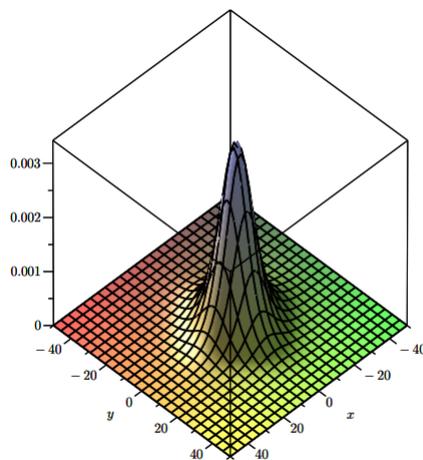
$$f_2(x, y, t) = a_{12} e^{k_1 x + \omega_1 t} e^{l_1 y}. \quad (47)$$

onde  $\omega_1 = -k_1^3$ .

Observe que (46) e (47) são soluções possíveis do conjunto de equações (32).

A figura 19 apresenta o gráfico da solução tipo dromion  $u = -2[\ln(f)]_{xy}$ .

Figura 19 – Solução tipo dromion



Fonte: Figura elaborada pelo autor

#### Solução tipo Solitoff

Outra interessante estrutura coerente é a chamada solução tipo solitoff (CHOW, 1996). Tais soluções são obtidas assumindo

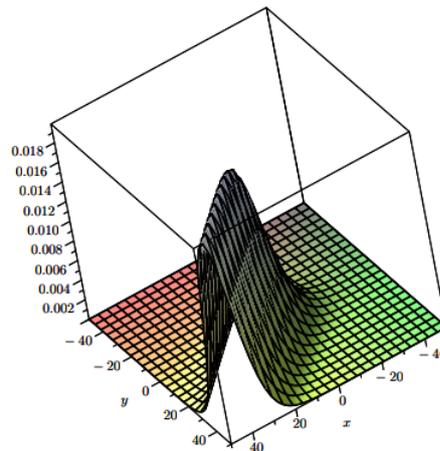
$$f_1(x, y, t) = e^{l_1 y}, \quad (48)$$

$$f_2(x, y, t) = a_{12} e^{k_1 x + \omega_1 t} e^{l_1 y}. \quad (49)$$

onde  $\omega_1 = -k_1^3$ .

Novamente, observe que (48) e (49) são soluções possíveis do conjunto de equações (32).

Figura 20 – Solução tipo solitoff



Fonte: Figura elaborada pelo autor

A figura 20 apresentamos o gráfico da solução tipo solitoff  $u = -2[\ln(f)]_{xy}$ .

#### Interação Dromion Solitoff

Nesta seção, introduziremos um novo tipo de solução da equação de Nizhnik-Novikov-Veselov em  $(2 + 1)$ -dimensões. Esta nova solução descreve a interação entre 1-Solitoff e 1-dromion. Para este fim, tomemos:

$$f_1(x, y, t) = e^{k_1 x + \omega_1 t} + e^{k_2 x + \omega_2 t} + e^{l_1 y}, \quad (50)$$

no método de Hirota. Isto implica que o grau de  $\epsilon^2$  resulta

$$f_2(x, y, t) = a_{13} e^{k_1 x + \omega_1 t} e^{l_1 y} + a_{23} e^{k_2 x + \omega_2 t} e^{l_1 y}. \quad (51)$$

e para o grau de  $\epsilon^3$ , obtemos:

$$f_3(x, y, t) = a_{123} e^{k_1 x + \omega_1 t} e^{k_2 x + \omega_2 t} e^{l_1 y}, \quad (52)$$

com

$$a_{123} = (a_{23} - a_{13}) \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}, \quad (53)$$

e  $\omega_i = -k_i^3$ . Desta forma, obtemos a solução:

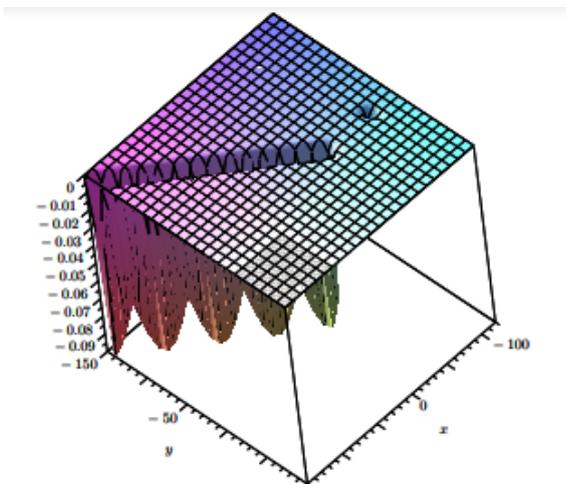
$$u = -2[\ln(1 + f_1(x, y, t) + f_2(x, y, t) + f_3(x, y, t))]_{xx}. \quad (54)$$

Observe o novo termo de interação em (53). Tal termo nos permite explorar novas possibilidades de inte-



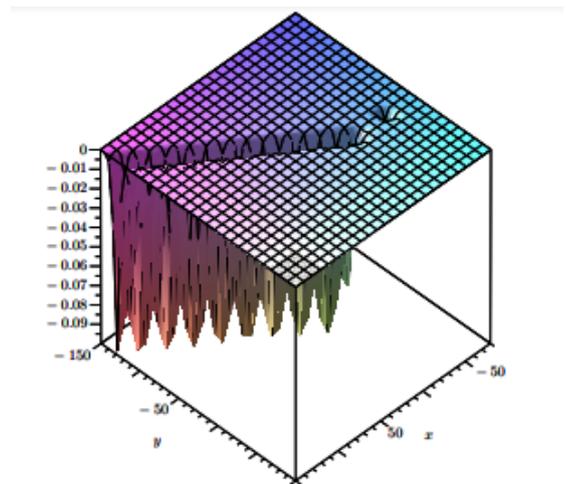
ração entre dromions e solitoffs. A seguir, traçamos alguns gráficos da solução (54) com os parâmetros  $k_1 = 0,4$ ,  $k_2 = 0,7$ ,  $l_1 = 0,5$ ,  $a_{13} = 2$  e  $a_{23} = 0,2$ .

Figura 21 – Interação dromion e solitoff  $t = -180$



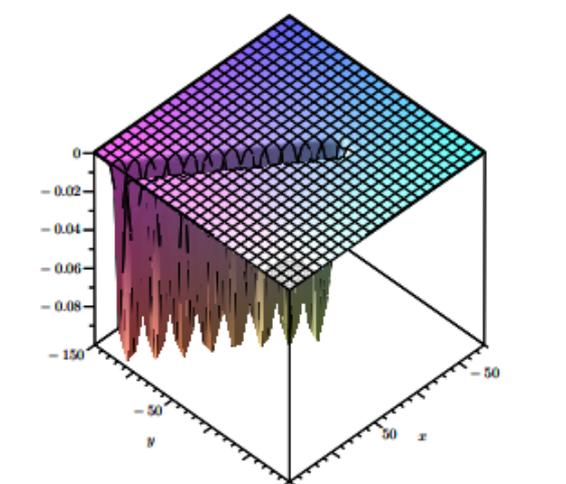
Fonte: Figura elaborada pelo autor

Figura 22 – Interação dromion e solitoff  $t = -100$



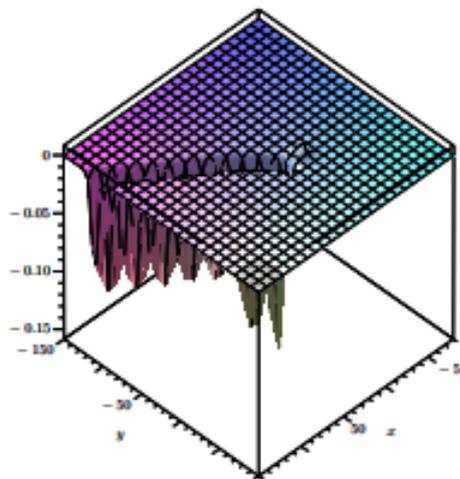
Fonte: Figura elaborada pelo autor

Figura 23 – Interação dromion e solitoff  $t = 0$



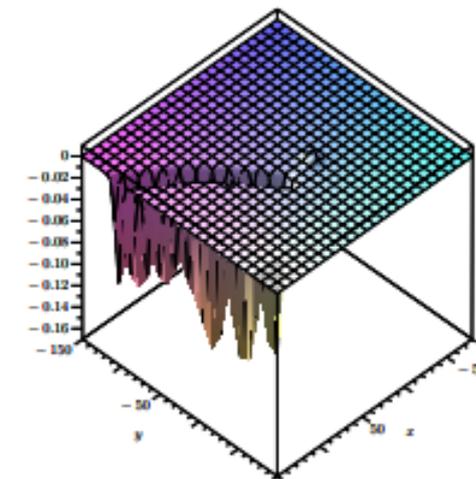
Fonte: Figura elaborada pelo autor

Figura 24 – Interação dromion e solitoff  $t = 50$



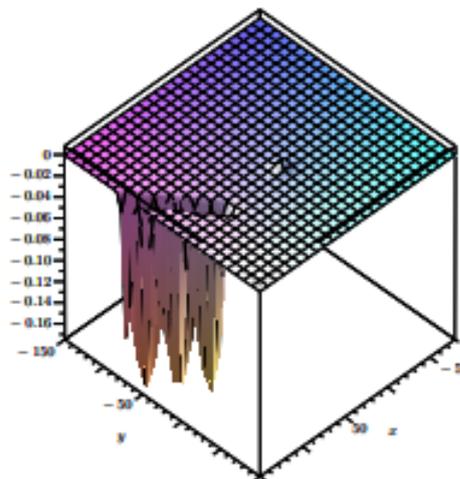
Fonte: Figura elaborada pelo autor

Figura 25 – Interação entre dromion e solitoff  $t = 100$



Fonte: Figura elaborada pelo autor

Figura 26 – Interação dromion e solitoff  $t = 200$



Fonte: Figura elaborada pelo autor

## CONCLUSÃO

Neste artigo, estudamos soluções sólitons de equações diferenciais não lineares em  $(1+1)$  e  $(2+1)$  dimensões através do método de Hirota. Em particular, estudamos a equação  $KdV$  em  $(1+1)$  e  $(2+1)$  dimensões e apresentamos uma nova solução da equação Nizhnik-Novikov-Veselov (Equação  $KdV$  em  $(2+1)$  dimensões). Esta nova solução, equação (54), descreve a interação entre um dromion e um solitoff. No nosso melhor conhecimento, a solução (58) é uma nova solução e ainda não foi apresentada na literatura. Convém destacar que ainda estamos analisando as propriedades da solução (54). Aparentemente, a interação apresentada nas figuras 21, 22 e 23 e as, 24, 25 e 26, assemelham-se às ondas propagadas de meios menos densos para meios mais densos. Acreditamos que a nova solução aqui apresentada possa ser aplicada a outros sistemas físicos não lineares.

## Referências

- BOITI, M. et al. **On the spectral transform of a Korteweg-de Vries equation in two spatial dimensions.** *Physics Letters A*, 1986. Citado na página 4.
- CHALUB, F.; ZUBELLI, J. **Sólitons: na crista da onda por mais de 100 anos.** Rio de Janeiro: Inst. de Matemática Pura e Aplicada, 2001. (Informes de matemática). Citado na página 1.
- CHOW, K. W. **'Solitoff' Solutions of Nonlinear Evolution Equations.** *Journal of the Physical Society of Japan*, v. 65, n. 7, 1996. Citado na página 7.
- DAS, A. **Integrable Models: World Scientific Lecture Notes in Physics.** [S.I.]: World Scientific Publishing Company, 1989. 356 p. ISBN 978-9971509101. Citado na página 1.
- DRAZIN, P. et al. **Solitons: An Introduction.** [S.I.]: Cambridge University Press, 1989. (Cambridge Texts in Applied Mathematics). ISBN 9780521336550. Citado na página 1.
- FERMI, E.; J., P.; ULAM, S. **Collected papers.** [S.I.]: University of Chicago Press, 1965. Citado na página 1.
- GOMES, J. F.; MELO, G. R.; ZIMERMAN, A. H. **A class of mixed integrable models.** *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 42, n. 27, p. 275208, jun 2009. Citado na página 1.
- HIETARINTA, J. **A search for bilinear equations passing Hirota's threesoliton condition. I. KdVtype bilinear equations.** *Journal of Mathematical Physics*, University of Turku, Finland, v. 28, 1987. Citado na página 2.
- HIETARINTA, J. **A search for bilinear equations passing Hirota's threesoliton condition. II. mKdVtype bilinear equations.** *Journal of Mathematical Physics*, University of Turku, Finland, v. 28, 1987. Citado na página 2.
- HIETARINTA, J. **A search for bilinear equations passing Hirota's threesoliton condition. III. SineGordontype bilinear equations.** *Journal of Mathematical Physics*, University of Turku, Finland, v. 28, 1987. Citado na página 2.
- HIETARINTA, J. **A search for bilinear equations passing Hirota's threesoliton condition. IV. Complex bilinear equations.** *Journal of Mathematical Physics*, University of Turku, Finland, v. 29, 1987. Citado na página 2.
- HIETARINTA, J. **One-dromion solutions for genetic classes of equations.** *Department of Physical Sciences, Journal of Mathematical Physics*, Finland, 1990. Citado na página 7.
- HIROTA, R. **Direct methods in soliton theory.** Berlin: Springer, 1980. ISBN 978-3-642-81450-1. Citado na página 2.
- KORTEWEG, D. J.; VRIES, G. D. **On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves.** *Philosophical magazine*, v. 5, 1985. Citado na página 2.
- MIURA, R. M.; GARDNER, C. S.; KRUSKAL, M. **Kortewegde Vries Equation and Generalizations: I. a remarkable explicit nonlinear transformation.** *Journal of Mathematical Physics*, v. 9, n. 8, p. 1202–1204, 1968. Citado na página 1.
- RADHA R.; LAKSHMANAN, J. **Singularity analysis and localized coherent structures in (2+1)dimensional generalized Kortewegde Vries equations.** *Journal of Mathematical Physics*, v. 35, 1994. Citado na página 7.
- RAJARAMAN, R. **Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory.** [S.I.]: North-Holland Publishing Company, 1982. (North-Holland personal library). ISBN 9780444862297. Citado na página 1.
- REMOISSENET, M. **Waves Called Solitons.** 3. ed. Berlin, Springer-Verlag: Enlarged Edition, 1999. ISBN 978-3-642-08519-2. Citado na página 1.
- TODA, M. **Nonlinear Waves and Solitons.** [S.I.]: Springer Netherlands, 1989. (Mathematics and its Applications). ISBN 9780792304425. Citado na página 1.
- ZABUSKY, N. J.; KRUSKAL, M. D. **Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States.** *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 15, p. 240–243, Aug 1965. Citado na página 1.

