Estruturas complexas nilpotentes em Álgebras de Lie solúveis

Ferreira, J. A. A. *

Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas

Submitted: 15 ago.2019. **Approved**: 16 mar.2020. **Published**: 15 dez.2020.

Edition: 1ª. **Volume**: 1º.

RESUMO

Considerando uma Álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, \lceil\cdot,\cdot\rceil)$ com estrutura complexa J, é possível definir em $\mathfrak{g}$ um novo colchete Lie $\lceil * \rceil_J$, de modo que se pode mostrar que os subespaços $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ são subálgebras de Lie isomorfas a $(\mathfrak{g}, \lceil * \rceil_J)$. Para tanto, consideramos apenas estruturas complexas integráveis. Mostraremos, que no caso em que essas subálgebras forem nilpotentes, então $(\mathfrak{g}, \lceil\cdot,\cdot\rceil)$ será solúvel. Nesse sentido, será feita uma caracterização da Álgebras de Lie $(\mathfrak{g}, \lceil * \rceil_J)$ com estrutura complexa s-passos nilpotente, afim de estudar o comportamento do colchete de Lie original $\lceil\cdot,\cdot\rceil$, permitindo assim a construção de exemplos de Álgebras de Lie de $\dim = 6$.

Palavras-chave: Álgebra de Lie, Colchetes, Estrutura complexa s-passos nilpotente.

ABSTRACT

Considering a Lie Álgebra $(\mathfrak{g}, \lceil\cdot,\cdot\rceil)$ with complex structure J, you can set in $\mathfrak{g}$, a new Lie bracket $\lceil * \rceil_J$, so that it is possible to show that the subspaces $\mathfrak{g}^{1,0}$ and $\mathfrak{g}^{0,1}$ are Lie subalgebras isomorphic to the $(\mathfrak{g}, \lceil * \rceil_J)$. Therefore, we will considere only integrated complex structures. It will be shown also that in the case where these are nilpotent subalgebras, then $(\mathfrak{g}\lceil\cdot,\cdot\rceil)$ is soluble. Accordingly, there will be a characterization of Lie algebras $(\mathfrak{g}, \lceil * \rceil)$ with complex structure s-step nilpotent, in order to study the behavior of the original Lie bracket $\lceil\cdot,\cdot\rceil$, thus allowing the construction of examples of Lie algebras of $\dim = 6$.

Keywords: Lie algebra, Brackets, s-steps complex nilpotent structure.

Sumário

INTRODUÇÃO

Iniciado com os trabalhos de Sophus Lie, no final do século XIX, as Álgebras de Lie surgiram com o propósito de estender uma teoria, análoga a teoria de Galois, ao estudo das equações diferenciais. A ideia de S. Lie de examinar os grupos de transformações lineares como obtidos através de soluções de equações diferenciais ordinárias, foi importante como ponto de partida para a teoria que chamamos hoje de “Álgebras de Lie”.

Atualmente as Álgebras de Lie têm sido apontadas como um importante elemento de estudos, com aplicações em vários campos da Matemática e da Física. Além de serem estruturas algébricas extremamente atraentes por si mesmas, sua importância se deve ao fato delas codificarem muitas informações sobre a geometria dos Grupos de Lie correspondentes a elas.

*Jaqueline Alexsandra Azevedo Ferreira. Possui Graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Feira de Santana. Possui Mestrado em Matemática pela Universidade Federal da Bahia. Atualmente, trabalha como professora Assistente I na Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. jaqueline_azevedo@ufrb.edu.br

ISSN: 2763-8855

Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas

Em particular, recentemente tem surgido interesse no estudo de estruturas complexas em Álgebras de Lie nilpotentes e solúveis, devido à sua relação com estruturas complexas e hipercomplexas em Grupos de Lie (ver (BARBERIS; DOTTI, 2004)).

Uma estrutura complexa em uma Álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ é um endomorfismo J tal que $J^2 = -I$. No presente trabalho, veremos que no caso de uma estrutura complexa integrável J sobre uma Álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$, os auto-espaços $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ associados aos autovalores i e $-i$, respectivamente, são subálgebras complexas de $\mathfrak{g}^C$, onde $\mathfrak{g}^C = C \otimes \mathfrak{g}$.

Uma importante classe de estruturas complexas são as chamadas abelianas, que satisfazem $[JX, JY] = [X, Y]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Em (FINO A.; DOTTI, 2001), I. Dotti e A. Fino provaram que tais estruturas só podem ocorrer em Álgebras de Lie solúveis e em (BARBERIS; DOTTI, 2004), M. Barberis e I. Dotti apresentaram uma caracterização das álgebras solúveis que admitem estruturas complexas abelianas.

Em (ANDRADA; BARBERIS, 2012), A. Andrada, M. Barberis e I. Dotti estudaram a estrutura de Grupos de Lie que admitem estruturas complexas abelianas invariantes à esquerda em termos de álgebras associativas comutativas. Analisaram diferentes obstáculos algébricos em Grupos de Lie solúveis que carregam estruturas complexas abelianas invariantes, além de estudar Grupos de Lie que admitem estruturas complexas abelianas invariantes à esquerda. Nesse sentido, frisaram que uma estrutura Hermitiana é Kahler se, e somente se, o Grupo de Lie é produto direto de várias cópias do plano real hiperbólico por um fator euclidiano.

Em sua Tese de Doutorado LICURGO (2007), considerou a situação em que $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ são nilpotentes, e mostrou que também nesse caso $\mathfrak{g}$ deve ser solúvel, sendo além disso obtida uma caracterização para Álgebras de Lie de dimensões 2, 4 e 6. No presente trabalho detalhamos as demonstrações destes resultados, utilizando alguns procedimentos que esclareceram várias implicações.

Ainda em (LICURGO, 2007), E. Licurgo e L. A. B. San Martin construíram exemplos de Álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ com estrutura complexa J para a qual os auto-espaços $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ são Álgebras de Lie s-passos nilpotentes.

Apresentamos, nesse artigo, todos os cálculos necessários para a edificação destes exemplos. Como base para a construção desses exemplos, E. Licurgo e L. A. B. San Martin utilizaram manipulações algébricas e, através delas descobriram como se comporta o colchete de Lie para uma dada base da Álgebra de Lie que satisfaz as condições de alguns resultados obtidos por eles e apresentados em (LICURGO S. E. C.; MARTIN, 2011). No presente trabalho, explanamos estas manipulações algébricas sobre outra base da mesma Álgebra de Lie, afim de encontrar os mesmos resultados obtidos a menos de uma mudança de base.

Muitas questões continuam em aberto e diversos problemas precisarão ser resolvidos até que tenhamos uma boa compreensão de quais Álgebras de Lie admitem estruturas complexas integráveis, bem como uma classificação de tais estruturas. Essa é portanto uma área de pesquisa promissora, e nesse artigo faremos um levantamento de alguns principais resultados já obtidos.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Álgebras de Lie

Definição 1. *Uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial sobre um corpo K, munido de uma operação bilinear, chamada colchete de Lie*

$$[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

que satisfaz as seguintes condições:

1. *anti-simetria:*
$$[X, X] = 0. \quad (1)$$
2. *identidade de Jacobi:*
$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0, \quad (2)$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

$$[X, Y] = XY - YX. \quad (3)$$

Exemplo 1. *O conjunto $gl(n, \mathfrak{R})$ das matrizes reais $n \times n$ é uma Álgebra de Lie com colchete definido por*

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Exemplo 2. *Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $\mathfrak{gl}(V)$ o espaço das transformações lineares de V. Como $\mathfrak{gl}(V)$ é isomorfo ao espaço das matrizes $n \times n$, a operação*

$$[T_1, T_2] = T_1 \circ T_2 - T_2 \circ T_1,$$

com T_1 e $T_2 \in \mathfrak{gl}(V)$, define em $\mathfrak{gl}(V)$ um colchete de Lie.

Exemplo 3. *Seja $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial. É imediato verificar que a operação*

$$[X, Y] = 0,$$

ISSN: 2763-8855

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$, define um colchete de Lie em $\mathfrak{g}$. As Álgebras de Lie com colchetes assim são chamadas de álgebras abelianas.

Definição 2. *Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ tal que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ se $X, Y \in \mathfrak{h}$ é chamado de subálgebra de $\mathfrak{g}$.*

Exemplo 4. *O conjunto das matrizes quadradas de traço zero, que será denotada por $\mathfrak{sl}(n, \mathfrak{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathfrak{K}) : trX = 0\}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathfrak{K})$.*

Definição 3. *Um subespaço vetorial $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, tal que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ se $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{h}$ é chamado de ideal de $\mathfrak{g}$. Em particular, todo ideal de $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$.*

Definição 4. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ um ideal. No espaço vetorial quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, defina*

$$[\bar{X}, \bar{Y}] = \overline{[X, Y]},$$

onde $\bar{X}$ denota a classe $X + \mathfrak{h}$. A construção desse colchete define em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ uma estrutura de Álgebra de Lie.

Definição 5. *Dada uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, podemos definir, por indução, os seguintes subespaços de $\mathfrak{g}$:*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g}^{(0)} & = & \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}' & = & [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ & \vdots & \\ \mathfrak{g}^{(k)} & = & [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}] \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g}^{1} & = & \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^{2} & = & [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ & \vdots & \\ \mathfrak{g}^{k} & = & [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}], \end{array}$$

onde $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ denota o subespaço gerado por $\{[X, Y]; X \in \mathfrak{a}, Y \in \mathfrak{b}\}$, se $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ são subconjuntos de $\mathfrak{g}$. Dizemos que $\mathfrak{g}^{(0)}$, $\mathfrak{g}', \ldots, \mathfrak{g}^{(k)}, \ldots$ é a série derivada de $\mathfrak{g}$ e que $\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^2, \ldots, \mathfrak{g}^k, \ldots$ é a série central decrescente de $\mathfrak{g}$.

Proposição 1. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie. Então os subespaços $\mathfrak{g}^{(k)}$ e $\mathfrak{g}^k$ são ideais de $\mathfrak{g}$, para todo $k \geq 1$.*

Proposição 2. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie. Então, $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$ e $\mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k$, para todo $k \geq 1$.*

Definição 6. *Dada uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, dizemos que*

1. *$\mathfrak{g}$ é solúvel se existir $k \geq 1$, tal que $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$ e*
2. *$\mathfrak{g}$ é nilpotente se existir $k \geq 1$, tal que $\mathfrak{g}^k = \{0\}$.*

Definição 7. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie nilpotente. Dizemos que $\mathfrak{g}$ é s-passos nilpotente se $s+1$ é o menor inteiro k tal que $\mathfrak{g}^k = 0$.*

Exemplo 5. *Agora apresentaremos uma subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{gl}(3, \mathfrak{R})$ chamada de álgebra de Heisenberg e definida por*

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathfrak{R} \right\}.$$

Ela é uma Álgebra de Lie solúvel. De fato,

$$\mathfrak{h}' = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathfrak{R} \right\}$$

e, portanto, $\mathfrak{h}^{(2)} = 0$.

É fácil ver que $\mathfrak{h}$ é também nilpotente. Com efeito, $\mathfrak{h}^2 = \mathfrak{h}'$ e $\mathfrak{h}^3 = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^2] = 0$.

Um fato relevante a se observar com relação à álgebra de Heisenberg é que com respeito à base

$$\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{e_3}, \right\}$$

de $\mathfrak{h}$, temos que

$$[e_1, e_2] = e_3$$

e o colchete dos demais elementos da base é nulo.

Proposição 3. *Toda Álgebra de Lie nilpotente é também solúvel.*

Demonstração: Isso decorre do fato de que $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$.

Existe em $\mathfrak{g}$ de dimensão finita, um único ideal solúvel chamado **radical solúvel**, $\nabla(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ que contém todos os ideais solúveis de $\mathfrak{g}$. Ver em (MARTIN, 2010).

Definição 8. *Dada uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, dizemos que $\mathfrak{g}$ é semi-simples se o radical solúvel de $\mathfrak{g}$ é nulo, isto é, se não existem em $\mathfrak{g}$ ideais solúveis além do ideal nulo.*

Exemplo 6. *A subálgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathfrak{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2, \mathfrak{R}) : trX = 0\}$ é semi-simples. De fato, considere a base de $\mathfrak{sl}(2, \mathfrak{R})$*

$$\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{X}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{Y}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{Z} \right\}$$

Verifica-se, facilmente, que

$$[X, Z] = Y \; [Y, X] = 2X \; [Y, Z] = -2Z.$$

Daí, que

$$\{X, Y, Z\} \in \mathfrak{sl}(2, \mathfrak{R})' = [\mathfrak{sl}(2, \mathfrak{R}), \mathfrak{sl}(2, \mathfrak{R})].$$

Portanto,

$$\mathfrak{sl}(2, \mathfrak{R})' = \mathfrak{sl}(2, \mathfrak{R}).$$

ISSN: 2763-8855
REΣET Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas

Raciocínio análogo mostra que

$$\mathfrak{sl}(2,\mathfrak{R})^{(k)} = \mathfrak{sl}(2,\mathfrak{R}),\ \forall\, k \geq 0.$$

Com isso, $\mathfrak{sl}(2,\mathfrak{R})$ não é solúvel.

Além disso, todos os ideais de $\mathfrak{sl}(2,\mathfrak{R})$ são triviais. De fato, seja $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}(2,\mathfrak{R})$ um ideal. Tome $W \in \mathfrak{h}$ e escreva $W = aX + bY + cZ$, com a, b e c reais não simultaneamente nulos. Obtemos

$$[W,X] = cY - 2bX \ \text{ e } \ [X,[X,W]] = -2bZ.$$

Se $b \neq 0$, temos que $Z \in \mathfrak{h}$, já que $\mathfrak{h}$ é ideal. Com isso, $Y = [X,Z] \in \mathfrak{h}$, e por fim $X = \frac{1}{2}[Y,X] \in \mathfrak{h}$.

Se $b = 0$ e $c \neq 0$, temos

$$Y = \frac{-1}{c}[W,X] \in \mathfrak{h}.$$

Se $b = c = 0$, nos resta $W = aX$, e ainda assim teremos $X \in \mathfrak{h}$. E de qualquer modo, $\{X,Y,Z\} \in \mathfrak{h}$, isto é $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2,\mathfrak{R})$.

Concluímos que $\mathfrak{sl}(2,\mathfrak{R})$ é semi-simples.

As Álgebras de Lie mais palpáveis são as Álgebras $\mathfrak{sl}(\mathfrak{n},\mathfrak{R})$, por essa razão é muito comum utilizá-las para ilustrar resultados de Álgebras de Lie semi-simples em geral.

Representações

Definição 9. *Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ Álgebras de Lie. Uma transformação linear $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo se $\phi[X,Y] = [\phi X, \phi Y]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.*

Definição 10. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie, V um espaço vetorial e $\mathfrak{gl}$(V) a Álgebra de Lie das transformações lineares de V. Uma representação de $\mathfrak{g}$ em V é um homomorfismo*

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V).$$

Um tipo de representação interessante ao nosso estudo é a **representação adjunta** de $\mathfrak{g}$, que é dada por

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X &\longmapsto ad(X), \end{aligned}$$

onde $ad(X)(Y) = [X,Y]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

É fácil ver que $ad(X)$ e ad são transformações lineares. E ad é homomorfismo por causa da identidade de Jacobi. De fato,

$$\begin{aligned} ad[X,Y](Z) &= [[X,Y],Z] \\ &= [X,[Y,Z] + [[X,Z],Y] \\ &= ad(X)ad(Y)(Z) - ad(Y)ad(X)(Z) \\ &= [ad(X), ad(Y)](Z). \end{aligned}$$

A última igualdade segue do colchete de Lie definido no exemplo 2.

Exemplo 7. *Podemos construir a representação adjunta de $\mathfrak{sl}(n)$ do seguinte modo. Considere a base*

$$\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{X}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{Y}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{Z} \right\}$$

de $\mathfrak{sl}(2,\mathfrak{R})$.

Tomando $H = aX + bY + cZ$, temos que

$$\begin{aligned} & ad(H)X \\ = \ & [H,X] = a[X,X] + b[Y,X] + c[Z,X] \\ = \ & \begin{bmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \\ = \ & 2bX - cY. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} ad(H)Y &= -2aX + 2cZ \\ ad(H)Z &= [H,Z] = aY - 2bZ. \end{aligned}$$

Logo, a aplicação

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(2,\mathfrak{R}) &\rightarrow \mathfrak{gl}(3,\mathfrak{R}) \\ \begin{bmatrix} b & a \\ c & -b \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} 2b & -2a & 0 \\ -c & 0 & a \\ 0 & 2c & -2b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

é a representação adjunta de $\mathfrak{sl}(2,\mathfrak{R})$.

Definição 11. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie. Uma representação ρ de $\mathfrak{g}$ no espaço vetorial V é uma representação nilpotente se ρ(X) é nilpotente (isto é, $\rho(X)^n = 0$ para algum $n \in \mathfrak{N}$) para todo X $\in \mathfrak{g}$.*

Teorema 1 (Engel)*.* *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie. $\mathfrak{g}$ é nilpotente se, e somente se, ad(X) é nilpotente, para todo $X \in \mathfrak{g}$. (MARTIN, 2010).*

Proposição 4. *Seja $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra nilpotente de $\mathfrak{g}$. A representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em si mesma é nilpotente.*

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{h} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{h}) \\ Y &\longmapsto ad(Y) : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}. \end{aligned}$$

ISSN: 2763-8855

REΣET Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas

Se a subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é nilpotente, segue do teorema de Engel que $ad(Y)$ é nilpotente, para todo $Y \in \mathfrak{h}$. A afirmação segue imediatamente da definição de representações nilpotentes.

O conceito de **peso**, que consideraremos relevante para importantes efeitos posteriores, será construído a partir dos resultados que seguem.

Considere V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathfrak{K}$ e seja $T : V \longrightarrow V$ uma transformação linear, cuja fatoração do polinômio minimal é dada por:

$$m_T(t) = p_1(t)^{r_1} \dots p_k(t)^{r_k}.$$

O Teorema da Decomposição Primária decompõe V numa soma direta de subespaços invariantes por T na forma

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s,$$

que são os auto-espaços generalizados

$$V_i = \{v \in V; p_i(T)^k v = 0, \text{ para algum } k \geq 1\}.$$

No caso em que $\mathfrak{K}$ é algebricamente fechado, temos $p_i(T) = T - \lambda_i$, com λ_i autovalor de T e os subespaços da decomposição primária são escritos como

$$V_i = \{v \in V; (T - \lambda_i)^k v = 0, \text{ para algum } k \geq 1\}.$$

Destacaremos a relação que estes auto-espaços tem com os autovalores de T denotando-os por V_{λ_i}.

***Proposição* 5.** *Suponha que o corpo de escalares é algebricamente fechado. Sejam T_1 e T_2 transformações lineares de V e V_{λ_i} os auto-espaços generalizados de T_1. Então $T_2(V_{\lambda_i}) \subset V_{\lambda_i}$ para todo i se e só se ad$(T_1)^q(T_2) = 0$, para algum $q \geq 1$. (MARTIN, 2010).*

Se $\mathfrak{g}$ é uma Álgebra de Lie nilpotente e ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V, dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, temos $ad(X)^q(Y) = 0$, para algum $q \geq 1$ e, portanto, $ad(\rho(X))^q(\rho(Y)) = 0$.

Fixando $X \in \mathfrak{g}$, podemos considerar a decomposição primária de V numa soma direta de subespaços generalizados de $\rho(X)$ na forma

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s.$$

Da proposição anterior e de

$$ad(\rho(X))^q(\rho(Y)) = 0,$$

temos que cada subespaço V_i é $\rho(Y)$-invariante para todo $Y \in \mathfrak{g}$ e, portanto, $\mathfrak{g}$ se representa em cada um deles. Então podemos tomar a decomposição primária de V_i como soma direta de subespaços invariantes por restrições de $\rho(Y)$, com $Y \in \mathfrak{g}$. Temos dois casos a considerar:

1º caso:

Se V_i é gerado por um único elemento, imediatamente teremos $\rho(Y) = \lambda_i(Y)v$, para $v \in V_i$. E daí que

$$(\rho(Y) - \lambda_i(Y))v = 0.$$

2 º caso:

Se algum V_i se decompõe para algum $\rho(Y)$, podemos tomar uma nova decomposição de V e repetir o argumento anterior. Como a cada nova decomposição a dimensão dos subespaços diminui, após finitos passos obtemos uma decomposição final

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus Wn,$$

tal que dado $Y \in \mathfrak{g}$, $i = 1, ..., n$, existe autovalor $\lambda_i(Y)$ para $\rho(Y)$ tal que W_i está contido no auto-espaço generalizado associado a $\lambda_i(Y)$ e segue da decomposição primária, que se $v \in W_i$

$$(\rho(Y) - \lambda_i(Y))^k v = 0,$$

para algum $k \geq 1$.

Ainda, considerando ρ_i a restrição da representação ao subespaço V_{λ_i}, observamos que para todo $X \in \mathfrak{g}$ $(\rho_i(X) - \lambda_i(X))^k v = 0$, para algum k, sempre que $v \in V_{\lambda_i}$. Isto é $\rho_i(X) - \lambda_i(X)$ é nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$. E daí que $tr(\rho_i(X) - \lambda_i(X)) = 0$ e

$$\lambda_i(X) = \frac{tr\rho_i(X)}{\dim V_{\lambda_i}}.$$

Com isso mostramos facilmente que λ_i é linear.

Com tudo que vimos, segue o teorema abaixo.

***Teorema* 2.** *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathfrak{K}$, um corpo algebricamente fechado, e ρ uma representação de $\mathfrak{g}$, uma Álgebra de Lie nilpotente, em V. Então existem funcionais lineares $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ de $\mathfrak{g}$ tais que se*

$$\begin{aligned} V_{\lambda_i} = \; & \{v \in V; \forall\, X \in \mathfrak{g}, \exists\, n \geq 1 \mid \\ & (\rho(X) - \lambda_i(X))^n v = 0\}, \end{aligned}$$

então V_{λ_i} é invariante pela representação ρ, isto é $\rho(X)(V_{\lambda_i}) \subset V_{\lambda_i}, \forall X \in \mathfrak{g}, 1 \leq i \leq s$ e

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}.$$

Demonstração: A discussão acima já garante a existência dos subespaços $W_1, \dots, W_s$ invariantes pela

ISSN: 2763-8855
Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas

representação ρ, e aplicações lineares $\lambda_i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{K}$ tais que

$$V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_s$$

e $W_i \subset V_{\lambda_i}$ como no enunciado.

Se houver vários $W's$ em um mesmo V_{λ_i} podemos somá-los em um único $W_i \subset V_{\lambda_i}$, e agora podemos tomar $\lambda_i \neq \lambda_j$, sempre que $i \neq j$.

Os funcionais lineares $\lambda_i - \lambda_j$ são não nulos, então podemos tomar $X \in \mathfrak{g}$ não nulo, tal que $\lambda_i(X) \neq \lambda_j(X)$, para $i \neq j$. Para X dessa forma, cada $\lambda_i(X)$ é autovalor de $\rho(X)$. Seja $V_{\lambda_i(X)}$ seu auto-espaço correspondente.

Sabemos que auto-espaços correspondentes a autovalores distintos são disjuntos, e $W_i \subset V_{\lambda_i(X)}$, então de $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_s$ segue que $W_i = V_{\lambda_i(X)}$. Mas, por definição, $V_{\lambda_i(X)} \supset V_{\lambda_i}$, logo $W_i \supset V_{\lambda_i}$. Portanto, $W_i = V_{\lambda_i}$.

O Teorema 2 motiva a seguinte definição.

***Definição* 12.** *Um funcional linear $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{K}$ para o qual*

$$0 \neq V_\lambda = \{ \begin{array}{l} v \in V; \forall X \in \mathfrak{g}, \exists n \geq 1, \\ (\rho(X) - \lambda(X))^n v = 0 \end{array} \}$$

*é chamado de peso. O subespaço V_λ é dito **subespaço de peso** associado a λ.*

***Observação* 1.** *O Teorema 2 garante que representações de Álgebras de Lie nilpotentes e de dimensão finita admitem pesos, no caso em que o corpo dos escalares é algebricamente fechado.*

***Definição* 13.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie. Uma aplicação linear $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é chamada de derivação, se satisfaz*

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY],$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

***Exemplo* 8.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie e seja $X \in \mathfrak{g}$. A identidade de Jacobi nos permite concluir que a aplicação linear ad$(X) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é uma derivação.*

***Proposição* 6.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Se $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é uma derivação e*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_m}$$

é a decomposição primária de $\mathfrak{g}$, onde

$$\mathfrak{g}_{\lambda_i} = \{X \in \mathfrak{g} : (D - \lambda_i)^n X = 0, \text{ para algum } n \geq 1,$$

então $[\mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}$ e $\mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j} = 0$ se $\lambda_i + \lambda_j$ não é autovalor de D.

Demonstração: Vamos fixar $\mathfrak{g}_{\lambda_i}$ como na decomposição da proposição e tome $X_0 = 0$.

Se $X \in \mathfrak{g}_{\lambda_i}$, então $\exists\, n \geq 1$, tal que

$$0 = (D - \lambda_i)^n X = (D - \lambda_i)(D - \lambda_i)^{n-1} X.$$

Considere o menor inteiro n que satisfaz a condição acima. Chamando $X_1 = (D - \lambda_i)^{n-1} X$, obteremos $(D - \lambda_i)X_1 = 0 = X_0$, isto é, $DX_1 = X_0 + \lambda_i X_1$. Mais uma vez, vamos chamar $(D-\lambda_i)^{n-2} X = X_2$, temos que $X_1 = (D - \lambda_i)^{n-1} X = (D - \lambda_i)(D - \lambda_i)^{n-2} X = (D - \lambda_i) X_2$, isto é, $DX_2 = X_1 + \lambda_i X_2$.

Repetindo o raciocínio, podemos obter conjuntos $\{X_1, \ldots, X_s\}$ **linearmente independentes**, tais que

$$DX_j = X_{j-1} + \lambda_i X_j \ j = 1, \ldots, s \ (X_0 = 0),$$

e existe uma base de $\mathfrak{g}_{\lambda_i}$ formada por tais conjuntos.

Sejam $\{X_1, \ldots, X_s\} \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i}$ e $\{Y_1, \ldots, Y_t\} \subset \mathfrak{g}_{\lambda_j}$ conjuntos **linearmente independentes** como acima. Mostraremos por indução sobre $k + l$ que

$$[X_k, Y_l] \in \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j} \ k = 1, \ldots, s \ l = 1, \ldots, t.$$

Como D é uma derivação, temos:

$$\begin{aligned} &D[X_k, Y_l] \\ =&[DX_k, Y_l] + [X_k, DY_l] \\ =&[X_{k-1} + \lambda_i X_k, Y_l] + [X_k, Y_{l-1} + \lambda_j Y_l] \\ =&[X_{k-1}, Y_l] + [X_k, Y_{l-1}] + (\lambda_i + \lambda_j)[X_k, Y_l], \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$(D - (\lambda_i + \lambda_j))[X_k, Y_l] = [X_{k-1}, Y_l] + [X_k, Y_{l-1}].$$

Se $k = l = 1$, obtemos

$$(D - (\lambda_i + \lambda_j))[X_1, Y_1] = 0,$$

então $[X_1, Y_1] \in \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}$.

A hipótese de indução é que

$$[X_{k-1}, Y_l] \in \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j} \text{ e } [X_k, Y_{l-1}] \in \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j},$$

ou seja, $[X_{k-1}, Y_l] \in \ker(D - (\lambda_i + \lambda_j))^q$, para algum q e $[X_k, Y_{l-1}] \in \ker(D - (\lambda_i + \lambda_j))^r$, para algum r. De onde afirmamos que $[X_{k-1}, Y_l] + [X_k, Y_{l-1}] \in \ker(D - (\lambda_i + \lambda_j))^n, n = \max\{q, r\}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= (D - (\lambda_i + \lambda_j))^n([X_{k-1}, Y_l] + [X_k, Y_{l-1}]) \\ &= (D - (\lambda_i + \lambda_j))^{n+1}[X_k, Y_l], \end{aligned}$$

ISSN: 2763-8855
RECET Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas

isto é, $[X_k, Y_l] \in \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}$.

Considere a derivação $ad(X)$, para cada $X \in \mathfrak{g}$, na proposição acima. Sempre podemos admitir a existência do auto-espaço generalizado não-nulo $\mathfrak{g}_0(X)$ associado ao autovalor $\lambda = 0$, já que ad$(X)X = 0$, e daí $X \in \mathfrak{g}_0(X)$.

Subálgebras de Cartan

***Definição* 14.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie. Uma subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é dita subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ se satisfaz*

1. *$\mathfrak{h}$ é nilpotente e*
2. *seu normalizador em $\mathfrak{g}$ é o próprio $\mathfrak{h}$,isto é, $\{X \in \mathfrak{g}; ad(X)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}\} = \mathfrak{h}$. Esta condição é equivalente a*

2'. Se $X \in \mathfrak{g}$ e $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ então $X \in \mathfrak{h}$

***Exemplo* 9.** *Considere a Álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2, \mathfrak{R})$. Então, o conjunto das matrizes diagonais*

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right\}$$

é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Seja $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan. No Teorema 2, vamos tomar $V = \mathfrak{g}$ e ρ a representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$. Como a representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em si mesma é nilpotente, o funcional nulo é sempre um peso dessa representação. Denotamos por $\mathfrak{g}_0$ o subespaço correspondente.

***Teorema* 3.** *Seja $V \neq 0$ um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra. Suponha que todo $X \in \mathfrak{g}$ é nilpotente. Então, existe $v \in V, v \neq 0$ tal que $Xv = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração: Seja $\dim \mathfrak{g} = 1$ e $X \in \mathfrak{g}, X \neq 0$. Como X é nilpotente, existe $k \geq 1$ tal que $X^k = 0$ e $X^{k-1} \neq 0$. Seja $\omega \in V$ tal que $X^{k-1}\omega = v \neq 0$. Então $Xv = 0$, o que mostra o resultado acima para as Álgebras de Lie de dimensão um. A demonstração segue por indução sobre a dimensão de $\mathfrak{g}$ e está detalhadamente contida em (MARTIN, 2010).

***Proposição* 7.** *Sob as condições da Definição 14, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$.*

Demonstração: Da discussão acima, temos

$$g_0 = \{X \in \mathfrak{g}; \forall H \in \mathfrak{h}; (ad(H))^n(X) = 0\}.$$

A representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}_0$ é nilpotente, e induz uma representação também nilpotente,

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{h} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}) \\ H \longmapsto \rho(H) : \mathfrak{g}_0/\mathfrak{h} &\longrightarrow \mathfrak{g}_0/\mathfrak{h} \\ v + \mathfrak{h} &\longmapsto ad(H)v + \mathfrak{h}, \end{aligned}$$

isto é, a transformação linear $\rho(H)$é nilpotente, para todo $H \in \mathfrak{h}$.

Pelo Teorema 3, existe $\tilde{v} \in \mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}$ não nulo, que é autovetor simultâneo de $\rho(H)$ para todo $H \in \mathfrak{h}$, com $\rho(H)\tilde{v} = \tilde{0} \equiv \mathfrak{h}$. Seja $v \in \mathfrak{g}_0$ tal que $\tilde{v} = v + \mathfrak{h}$. Como $\mathfrak{h} = \rho(H)\tilde{v} = ad(H)v + \mathfrak{h}$, nos resta que ad$(H)v \in \mathfrak{h}$. Então v está no normalizador de $\mathfrak{h}$, que é o próprio $\mathfrak{h}$, daí $v \in \mathfrak{h}$. Isso significa que $\tilde{v} = \tilde{0}$, que não é autovetor. Nos resta $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{h} = 0$, isto é $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.

Os pesos não-nulos da representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ são chamados de **raízes**. Seu conjunto será denotado por $\prod$. Segue do Teorema 2 e da afirmação acima, que dada uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita sobre o corpo dos complexos, dada uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ e denotando por $\prod$ o conjunto de raízes do par ($\mathfrak{h}$,$\mathfrak{g}$), podemos escrever

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\lambda \in \prod} \mathfrak{g}_\lambda,$$

onde $\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g}; \forall H \in \mathfrak{h}; (ad(H) - \lambda(H))^n(X) = 0,$ para algum $n \geq 1\}$.

Elementos regulares

Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie n-dimensional. Para definir um elemento regular, tome $X \in \mathfrak{g}$. Denotaremos por p_X o o polinômio característico de ad(X) da forma

$$p_X(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}(X)\lambda^{n-1} + \ldots + p_1(X)\lambda + p_0(X),$$

onde cada $p_i(\cdot)$ é um polinômio de grau $n - i$ nas coordenadas de X, já que os coeficientes do polinômio característico são polinômios no espaço das transformações lineares e ad é linear em X. Em geral, esses coeficientes são dados pelo traço de algum produto exterior da transformação linear.

***Definição* 15.** *O posto de uma Álgebra de Lie de dimensão finita é o menor índice i em que p_i não é identicamente nulo, onde p_i denota, os coeficientes do polinômio característico. Um elemento $X \in \mathfrak{g}$ é dito regular se $p_i(X) \neq 0$ onde i é o posto de $\mathfrak{g}$.*

A Álgebra de Cartan é exatamente o subespaço $\mathfrak{g}_0$ que aparece na decomposição primária da transformação linear ad(X), para um elemento regular X genérico em $\mathfrak{h}$.

ISSN: 2763-8855
REΣET Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas

***Exemplo* 10.** *Seja $\mathfrak{sl}(2,\mathfrak{R})$ com a base*

$$\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{X}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{Z}\right\}$$

Tomando $H = aX + bY + cZ$, a matriz de sua adjunta nesta base é

$$ad(H) = \begin{bmatrix} 2b & -2a & 0 \\ -c & 0 & a \\ 0 & 2c & -2b \end{bmatrix}$$

e, portanto, $p_H(\lambda) = \lambda^3 - 4(b^2 + ac)\lambda$. Da definição acima, temos que o posto de $\mathfrak{sl}(2,\mathfrak{R})$ é um e H é elemento regular se e só se $b^2 + ac \neq 0$. Em particular, Y é um elemento regular.

***Teorema* 4.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo de característica zero e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan. Então, existe um elemento regular $X \in \mathfrak{h}$.*

Antes de demonstrar o teorema acima, faremos uma breve discussão sobre a ação dos automorfismos sobre as subálgebras de Cartan.

Conjugação entre álgebras de Cartan

***Definição* 16.** *Duas subálgebras de Cartan são ditas conjugadas, se uma é a imagem da outra por automorfismo de $\mathfrak{g}$.*

***Teorema* 5.** *Numa Álgebra de Lie sobre um corpo algebricamente fechado, as subálgebras de Cartan são duas a duas conjugadas por automorfismos.*

***Proposição* 8.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie. Se D é uma derivação nilpotente de $\mathfrak{g}$, então e^{tD} é um automorfismo de $\mathfrak{g}$, para todo $t \in \mathfrak{K}$.*

Subálgebra de Borel

Nosso objetivo agora é definir a **subálgebra de Borel**. O primeiro passo consiste numa discussão sobre a ordem lexicográfica em espaços vetoriais.

***Definição* 17.** *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo ordenado $\mathfrak{K}$ e $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V. Sejam $v, w \in V$ escritos na forma*

$$v = a_1 v_1 + ... + a_n v_n$$
$$w = b_1 v_1 + ... + b_n v_n,$$

com $a_i, b_i \in \mathfrak{K}$. A ordem lexicográfica em V em relação a base $\{v_1, ..., v_n\}$ é dada por $v \leq w$ se $v = w$ ou se $a_i < b_i$, onde i representa o primeiro índice em que as coordenadas de v e w são diferentes. Essa ordem define de fato uma ordem que é compatível com a estrutura de espaço vetorial (isto é, $v \leq w \Rightarrow v + u \leq w + u$ e $xv \leq xw$ se $x > 0$ e $v \leq w$).

***Exemplo* 11.** *A relação $R = \{(a + bi, c + di) : b < d$ ou $b = d$ e $a \leq c\}$, definida no conjunto dos números complexos, é uma ordem lexicográfica para o conjunto $\mathfrak{C}$. Considerando $z_1 = -5 - i, z_2 = 6 - i, z_3 = -2 + 3i, z_4 = 3 + 3i$ e $z_5 = -2 + 4i$, temos a seguinte ordem lexicográfica $z_1 \leq z_2 \leq z_3 \leq z_4 \leq z_5$.*

Denotaremos por $\prod^+ \subset \prod$ o conjunto de todas as raízes positivas. Isto é, o conjunto dos pesos não-nulos da representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ que são funcionais lineares no espaço vetorial $\mathfrak{h}$ que levam todo elemento positivo $X \in \mathfrak{h}$(escolhendo uma ordem lexicográfica em $\mathfrak{h}$) em um elemento não-negativo em $\mathfrak{C}$(escolhendo uma ordem lexicográfica no conjunto $\mathfrak{C}$).

***Definição* 18.** *Para uma escolha de raízes positivas $\prod^+ \subset \prod$, seja $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, onde $\mathfrak{n}^+ = \sum_{\lambda \in \prod^+} \mathfrak{g}_\lambda$. A subálgebra $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ é chamada de subálgebra de Borel gerada por $\prod^+$.*

***Observação* 2.** *Em Álgebras de Lie semi-simples as subálgebras de Borel são justamente as subálgebras solúveis maximais, no sentido que toda subálgebra solúvel está contida em alguma subálgebra de Borel. Ainda todas as subálgebras maximais são conjugadas por um automorfismo interno de $\mathfrak{g}$ a subálgebra $\mathfrak{b}$ (LICURGO, 2007).*

Estruturas Complexas

***Definição* 19.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie. Dizemos que $\mathfrak{g}$ é uma Álgebra de Lie complexa se for espaço vetorial complexo e $[iX, Y] = i[X, Y]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.*

***Definição* 20.** *Uma estrutura complexa sobre uma Álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ é um endomorfismo J do espaço vetorial $\mathfrak{g}$ tal que $J^2 = -I$. No que segue vamos supor sempre que J é integrável, isto é, $N_J = 0$, onde N_J é o tensor de Nijenhuis de J:*

$$\begin{aligned} & N_J(X,Y) \\ = \; & J[X,Y] - [JX,Y] - [X,JY] - J[JX,JY]. \end{aligned}$$

***Definição* 21.** *Dizemos que uma estrutura complexa J sobre $\mathfrak{g}$ é adaptada se*

$$[JX, Y] = J[X, Y].$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

***Observação* 3.** *Se J é uma estrutura complexa adaptada, então J é integrável. De fato,*

$$\begin{aligned} & J[X,Y] - [JX,Y] - [X,JY] - J[JX,JY] \\ = \; & J[X,Y] - J[X,Y] - J[X,Y] - J^2[X,JY] \\ = \; & J[X,Y] - J[X,Y] - J[X,Y] + J[X,Y] \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

ISSN: 2763-8855
REΣCET Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas

Observação 4. *No caso de J ser uma estrutura complexa adaptada $\mathfrak{g}$ passa a ser uma Álgebra de Lie Complexa se definirmos a multiplicação por escalares complexos através de J. Tomado $iX \equiv JX$, temos*

$$[iX, Y] = [JX, Y] = J[X, Y] = i[X, Y].$$

A princípio, vamos considerar $\mathfrak{g}$ como espaço vetorial real, $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = n$. Sejam $\{1, i\}, \{X_1, ..., X_n\}$ bases de $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{g}$, respectivamente. A complexificada de $\mathfrak{g}$ é dada por

$$\mathfrak{g}^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C} \otimes \mathfrak{g}.$$

Então, $\{X_1, ..., X_n, iX_1, ..., iX_n\}$ constitui uma base de $\mathfrak{g}^{\mathfrak{C}}$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}^{\mathfrak{C}} = 2n$ e podemos escrever $\mathfrak{g}^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$.

Se $\mathfrak{g}$ é Álgebra de Lie real, é fácil estender o colchete de Lie a $\mathfrak{g}^{\mathfrak{C}}$ de modo que ela se torne uma Álgebra de Lie Complexa.

Dada uma estrutura complexa integrável J sobre $\mathfrak{g}$, sua complexificada $\mathfrak{g}^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ pode ser escrita como $\mathfrak{g}^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{g}^{1,0} \oplus \mathfrak{g}^{0,1}$, onde

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{1,0} &= \{X \in \mathfrak{g}^{\mathfrak{C}}; JX = iX\} \text{ e} \\ \mathfrak{g}^{0,1} &= \{X \in \mathfrak{g}^{\mathfrak{C}}; JX = -iX\} \end{aligned}$$

são os $\pm\, i$-auto-espaços de J.

Proposição 9. *Os auto-espaços $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ são subálgebras de $\mathfrak{g}^{\mathfrak{C}}$.*

Demonstração: Como J é integrável $(N_J(X, Y) = 0)$, temos para $X, Y \in \mathfrak{g}^{1,0}$

$$\begin{aligned} 0 &= J[X, Y] - [JX, Y] - [X, JY] - J[JX, JY] \\ &= J[X, Y] - [iX, Y] - [X, iY] - J[iX, iY] \\ &= J[X, Y] - i[X, Y] - i[X, Y] + J[X, Y] \\ &= 2J[X, Y] - 2i[X, Y]. \end{aligned}$$

Assim, $J[X, Y] = i[X, Y]$ e daí, $[X, Y] \in \mathfrak{g}^{1,0}$, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}^{1,0}$.

Analogamente $J[X, Y] = -i[X, Y]$, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}^{0,1}$.

Definição 22. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie e J uma estrutura complexa sobre $\mathfrak{g}$. J é dita abeliana se satisfaz*

$$[JX, JY] = [X, Y], \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

RESULTADOS

Estaremos interessados em caracterizar e exemplificar Álgebras de Lie, com estrutura complexa cujos subespaços sejam subálgebras nilpotentes. Por questões didáticas,faremos um estudo sobre estruturas complexas J definindo em $\mathfrak{g}$ um novo colchete de Lie, de modo que $\mathfrak{g}$, munida deste colchete, seja uma álgebra de Lei isomorfa às subálgebras $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$. Veremos que dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, tal que $\mathfrak{g}^{1,0}$(ou equivalentemente $\mathfrak{g}^{0,1}$) é uma subálgebra nilpotente de $\mathfrak{g}^{\mathfrak{C}}$, então $\mathfrak{g}$ é solúvel. Neste sentido, iremos nos dedicar a estruturas complexas para as quais os $\pm\, i$ auto-espaços são subálgebras de $\mathfrak{g}^{\mathfrak{C}}$, para tanto consideraremos apenas Álgebras de Lie que admitem estruturas complexas integráveis.

Caracterizaremos as Álgebras de Lie solúveis até dimensão 6 que admitem estruturas complexas com auto-espaços nilpotentes. Por fim, faremos a construção detalhada de vários exemplos que satisfazem as condições dos resultados obtidos.

O Colchete *

Para estudar a estrutura complexa J definimos em $\mathfrak{g}$ um novo colchete de Lie $[*]_J$, tal que $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ sejam Álgebras de Lie isomorfas a ($\mathfrak{g}$,$[*]_J$)

Definição 23. *Seja $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ uma Álgebra de Lie com uma estrutura complexa integrável J. Definimos*

$$\begin{aligned} &[*]_J : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \\ &\quad (X, Y) \longmapsto [X * Y]_J = \frac{1}{2}([X, Y] - [JX, JY]) \end{aligned}$$

Proposição 10. *$(\mathfrak{g}, [*]_J)$, como definida acima, é uma Álgebra de Lie.*

Demonstração: A anti-simetria é óbvia.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathfrak{C}$, temos

$$\begin{aligned} &[\alpha X + \beta Y * Z]_J \\ =\;& \frac{1}{2}([\alpha X + \beta Y, Z] - [J(\alpha X + \beta Y,), JZ]) \\ =\;& \frac{1}{2}(\alpha[X, Y] + \beta[Y, Z] - [\alpha JX + \beta JY, JZ]) \\ =\;& \alpha[X * Z]_J + \beta[Y * Z]_J. \end{aligned}$$

Isso prova a bilinearidade.

Também se verifica a identidade de Jacobi de $[*]_J$. De fato, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, temos:

$$\begin{aligned} & [X * [Y * Z]_J]_J \\ =\;& [X * \frac{1}{2}([Y, Z] - [JY, JZ])]_J \\ =\;& \frac{1}{2}([X, \frac{1}{2}([Y, Z] - [JY, JZ])] \\ & -[JX, J(\frac{1}{2}([Y, Z] - [JY, JZ]))]) \\ =\;& \frac{1}{2}([X, \frac{1}{2}([Y, Z] - [JY, JZ])] \\ & -[JX, \frac{1}{2}([JY, Z]) + [Y, JZ]) \\ =\;& \frac{1}{4}([X, [Y, Z]] + [JZ, [X, JY]] \\ & +[JY, [JZ, X]] + [Z, [JX, JY]] \\ & +[JY, [Z, JX]] + [JZ, [JX, Y]] \\ & +[Y, [JZ, JX]]) \end{aligned}$$

ISSN: 2763-8855
REΣET Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas

Do mesmo modo, obtemos:

$$\begin{aligned}[Z*[X*Y]_J]_J = \frac{1}{4}([Z,[X,Y]] \\ + [JY,[Z,JX]] + [JX,[JY,Z]] \\ + [Y,[JZ,JX]] + [JX,[Y,JZ]] \\ + [JY,[JZ,X]] + [X,[JY,JZ]])\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}[Y*[Z*X]_J]_J = \frac{1}{4}([Y,[Z,X]] \\ + [JX,[Y,JZ]] + [JZ,[JX,Y]] \\ + [X,[JY,JZ]] + [JZ,[X,JY]] \\ + [JX[,JY,Z] + [Z,[JX,JY]]).\end{aligned}$$

Das três últimas equações, concluímos que

$$\begin{aligned}&[X*[Y*Z]_J]_J + [Z*[X*Y]_J]_J \\ &+ [Y*[Z*X]_J]_J \\ =&\frac{1}{4}([X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]]) \\ &+ \frac{1}{2}([X,[JY,JZ]] + [JZ,[X,JY]] \\ &+ [JY,[JZ,X]] + [Z,[JX,JY]] \\ &+ [JY,[Z,JX]] + [JX,[Y,JZ]] \\ &+ [JZ,[JX,Y]] + [Y,[JZ,JX]] \\ &+ [JX,[JY,Z]]).\end{aligned}$$

Agora, usaremos a validade da identidade de Jacobi para o colchete $[\cdot,\cdot]$

$$\begin{aligned}&[X*[Y*Z]_J]_J + [Z*[X*Y]_J]_J \\ &+ [Y*[Z*X]_J]_J \\ =&\frac{1}{2}\{([X,[JY,JZ]] + [JZ,[X,JY]] \\ &+ [JY,[JZ,X]]) + [Z,[JX,JY]] \\ &+ [JY,[Z,JX]] + [JX,[JY,Z]]) \\ &+ [JX,[Y,JZ]] + [JZ,[JX,Y]] \\ &+ [Y,[JZ,JX]] \\ &= 0\end{aligned}$$

No que segue, denotamos a Álgebra de Lie ($\mathfrak{g}$, $[*]_J$) por $\mathfrak{g}_*$.

***Proposição* 11.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie e J uma estrutura complexa sobre $\mathfrak{g}$. Então $\mathfrak{g}_*$ é abeliana se, e só se, J é abeliana.*

Demonstração: $[\mathfrak{X} * \mathfrak{Y}]_J = 0$ se, e só se, $[X,Y] - [JX,JY] = 0; X,Y \in \mathfrak{g}$.

***Proposição* 12.** *Seja $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ uma Álgebra de Lie com estrutura complexa integrável J. Então J é adaptada a $(\mathfrak{g},[*]_J)$. Consequentemente, $\mathfrak{g}_*$ é uma Álgebra de Lie complexa. Basta definir a multiplicação por i através de J.*

Demonstração: Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, temos

$$\begin{aligned}&J[X*Y]_J \\ =&\frac{1}{2}(J[X,Y] - J[JX,JY]) \\ =&\frac{1}{2}([JX,Y] + [X,JY]) \\ =&\frac{1}{2}([JX,Y] - [JJX,JY]) = [JX*Y]_J.\end{aligned}$$

***Proposição* 13.** *Seja $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ uma Álgebra de Lie com estrutura complexa J. Então as Álgebras de Lie $\mathfrak{g}^{1,0}$, $\mathfrak{g}^{0,1}$ e $(\mathfrak{g},[*]_J)$ são isomorfas.*

Demonstração: Tome $Z \in \{X - iJX; X \in \mathfrak{g}\}$.

$$\begin{aligned}JZ =&JX - iJ^2X \\ =&JX - i(-X) = JX + iX \\ =&i(X - iJX) = iZ,\end{aligned}$$

isto é $\{X - iJX; X \in \mathfrak{g}\} \subseteq \mathfrak{g}^{1,0}$.

Tome $Z \in \mathfrak{g}^{1,0}$, e sejam $X, Y \in \mathfrak{g}$ tais que $Z = X + iY$. Temos que

$$JZ = iZ \Longrightarrow JX + iJY = i(X + iY) = -Y + iX.$$

Nos resta que $-JX = Y$, e daí $Z = X - iJX$. Logo, $\{X - iJX; X \in \mathfrak{g}\} \supseteq \mathfrak{g}^{1,0}$. Com isso, mostramos que $\mathfrak{g}^{1,0} = \{X - iJX; X \in \mathfrak{g}\}$.

Considere

$$\begin{aligned}\varphi : (\mathfrak{g},[*]_J) &\longrightarrow \mathfrak{g}^{1,0} \\ X &\longmapsto \frac{1}{2}(X - iJX)\end{aligned}$$

É fácil ver que $\varphi(JX) = i\varphi(X)$, então φ é $\mathfrak{C}$-linear.

Como J é adaptada a $(\mathfrak{g},[*]_J)$, temos que

$$\begin{aligned}&\varphi[X*Y]_J \\ =&\ \frac{1}{2}([X*Y]_J - iJ[X*Y]_J) \\ =&\ \frac{1}{4}([X,Y] - [JX,JY]) \\ -&\ \frac{1}{4}iJ([X,Y] - [JX,JY]) \\ =&\ \frac{1}{4}([X,Y] - [JX,JY] - i[JX,Y] - [X,JY]) \\ =&\ \frac{1}{4}([X,Y] + [X,-iJY] \\ &+[-iJX,Y] + [-iJX,-iJY]) \\ =&\ \left[\frac{1}{2}(X - iJX), \frac{1}{2}(Y - iJY)\right] = [\varphi(X),\varphi(Y)].\end{aligned}$$

ISSN: 2763-8855

Logo, φ é homeomorfismo e, portanto, isomorfismo entre $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ e $\mathfrak{g}^{1,0}$. Analogamente, $\mathfrak{g}^{0,1}$ é isomorfo a $(\mathfrak{g}, [*]_J)$. Basta definir o isomorfismo $\psi(X) = \frac{1}{2}(X + iJX)$ e observar que $\mathfrak{g}^{0,1} = \{X + iJX; X \in \mathfrak{g}\}$.

Das proposições 12 e 13, temos o seguinte corolário.

***Corolário* 1.** *Seja $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ uma Álgebra de Lie com estrutura complexa integrável J. Então os $\pm i$ auto-espaços $\mathfrak{g}^{0,1}$ e $\mathfrak{g}^{1,0}$ de J são subálgebras complexas de $\mathfrak{g}^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$.*

***Definição* 24.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie e J uma estrutura complexa sobre $\mathfrak{g}$. J é dita s-passos nilpotente se é integrável e $\mathfrak{g}_*$ é s-passos nilpotente.*

Condição: $\mathfrak{g}$ é solúvel se $\mathfrak{g}_*$ é nilpotente

***Teorema* 6.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie com estrutura complexa, tal que $\mathfrak{g}_*$ é nilpotente. Então $\mathfrak{g}$ é solúvel.*

A demonstração deste Teorema é baseada em um lema de Goto. Por questões didáticas, seguem algumas definições cujo conhecimento é fundamental para a demonstração do Lema de Goto.

***Definição* 25.** *Seja A um subconjunto de $\mathfrak{g}$. Chamamos de centralizador de A em $\mathfrak{g}$ e denotamos por $z(A)$ o conjunto*

$$z(A) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0, \forall Y \in A\}$$

O centralizador de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$ será chamado de centro de $\mathfrak{g}$ e será denotado por:

$$c(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\}$$

***Definição* 26.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie sobre um corpo $\mathfrak{K}$. Diremos que $X \in \mathfrak{g}$ é um elemento semi-simples de $\mathfrak{g}$ se ad(X) é diagonalizável para alguma extensão de $\mathfrak{K}$.*

***Observação* 5.** *Se $\mathfrak{g}$ é semi-simples, então as subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$ são as subálgebras abelianas maximais cujos elementos são semi-simples (LICURGO, 2007).*

***Lema* 1** (Goto)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie semi-simples sobre um corpo algebricamente fechado e de característica zero, e seja $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra nilpotente. Então*

$$\dim \mathfrak{n} \leq \dim \mathfrak{b} - \dim \mathfrak{h} = \frac{\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h}}{2},$$

onde $\mathfrak{b}$ é uma subálgebra de Borel e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan.

***Proposição* 14.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie sobre $\mathfrak{K}$ e $\bar{\mathfrak{K}}$ uma extensão de $\mathfrak{K}$. $\mathfrak{g}$ é solúvel se e só se $\mathfrak{g}^{\bar{\mathfrak{K}}} = \bar{\mathfrak{K}} \otimes \mathfrak{g}$ é solúvel.*

Demonstração: De fato, as álgebras derivadas tanto de $\mathfrak{g}$ quanto de $\mathfrak{g}^{\bar{\mathfrak{K}}}$ são gerados por colchetes sucessivos de elementos de $\mathfrak{g}$; as álgebras derivadas de $\mathfrak{g}$ são obtidas por combinações lineares com coeficientes em $\mathfrak{K}$ enquanto as de $\mathfrak{g}^{\bar{\mathfrak{K}}}$ por combinações lineares com coeficientes em $\bar{\mathfrak{K}}$. Daí que

$$(\mathfrak{g}^{(n)})^{\bar{\mathfrak{K}}} = (\mathfrak{g}^{\bar{\mathfrak{K}}})^{(n)}$$

para todo $n \geq 0$.

***Proposição* 15.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ um ideal. Suponha que tanto $\mathfrak{h}$ quanto $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sejam solúveis. Então $\mathfrak{g}$ é solúvel.*

Ver demonstração em (MARTIN, 2010).

***Proposição* 16.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie que não é solúvel e $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ seu radical solúvel. Então $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ é semi-simples.*

Demonstração: Seja $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ o homomorfismo canônico e tome um ideal solúvel $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Então, $\pi^{-1}(\mathfrak{i})$ é um ideal que contém $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ e $\mathfrak{i} = \pi^{-1}(\mathfrak{i})/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Assim, $\pi^{-1}(\mathfrak{i})$ é solúvel e, portanto, está contido em $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$, isto é $\mathfrak{i} = 0$, então $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ é semi-simples.

Estamos preparados para demonstrar o teorema 6.

Demonstração: (do Teorema 6) Escrevendo a complexificada $\mathfrak{g}^{\mathfrak{C}}$ de $\mathfrak{g}$ como soma direta de duas subálgebras nilpotentes, por isomorfismo de $\mathfrak{g}_*$.

$$\mathfrak{g}^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{g}^{1,0} \oplus \mathfrak{g}^{0,1}$$

Suponhamos que $\mathfrak{g}$ não é solúvel. Da proposição 14 teríamos que $\mathfrak{g}^{\mathfrak{C}}$ não é solúvel. Se $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}^{\mathfrak{C}})$ é o radical solúvel de $\mathfrak{g}^{\mathfrak{C}}$, a proposição 16 garante que a Álgebra de Lie $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}^{\mathfrak{C}}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g}^{\mathfrak{C}})$ é semi-simples. Considere $\mathfrak{n}_1$ e $\mathfrak{n}_2$ as respectivas projeções de $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ sobre $\mathfrak{m}$. As projeções $\mathfrak{n}_1$ e $\mathfrak{n}_2$continuam nilpotentes e $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$. Logo, pelo lema 1, $\dim \mathfrak{n}_1 < \frac{1}{2} \dim \mathfrak{m}$ e $\dim \mathfrak{n}_2 < \frac{1}{2} \dim \mathfrak{m}$. Contradição a menos que $\mathfrak{m} = \{0\}$. Portanto, $\mathfrak{g}$ é solúvel.

Caracterização de $\mathfrak{g}*$ até dimensão complexa 3

Considerando apenas estruturas complexas integráveis, iremos caracterizar as Álgebras de Lie $\mathfrak{h}$ nilpotentes, tais que existe $\mathfrak{g}$ com $\mathfrak{g}_* = \mathfrak{h}$. Esta caracterização será feita separadamente, considerando $\mathfrak{h}$ de dimensões complexas 1,2 e 3.

Se $\mathfrak{h}$ é Álgebra de Lie Complexa 1-dimensional, então $\mathfrak{h}$ é abeliana.

***Proposição* 17.** *Seja $\mathfrak{h}$ uma Álgebra de Lie nilpotente 2-dimensional, sobre um corpo $\mathfrak{K}$. Então $\mathfrak{h}$ é abeliana.*

ISSN: 2763-8855

Demonstração: Se $\dim \mathfrak{h} = 2$, afirmamos que $\dim \mathfrak{h}^1 = 1$ ou $\dim \mathfrak{h}^1 = 0$. Caso contrário, teríamos $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^1$. Daí

$$\mathfrak{h}^2 = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^1] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathfrak{h}^1 = \mathfrak{h},$$

de modo que $\mathfrak{h}^n = \mathfrak{h}$, para todo $n \geqslant 1$, o que não é possível, já que $\mathfrak{h}$ é nilpotente. Um raciocínio análogo mostra que $\dim \mathfrak{h}^2 = 0$.

Suponha $\dim \mathfrak{h}^1 = 1$ e seja $\{X\}$ uma base de $\mathfrak{h}^1$. Seja $Y \in \mathfrak{h} \backslash \mathfrak{h}^1$ tal que $\{X, Y\}$ é uma base de $\mathfrak{h}$. Temos que $[X, Y] \in \mathfrak{h}^1$, já que $\mathfrak{h}^1$ é ideal de $\mathfrak{h}$. Tome $c \in \mathfrak{K}$ tal que $[X, Y] = cX$. Se $c \neq 0$, então $X = \frac{1}{c}[X, Y]$ e $[X, Y] = [\frac{1}{c}[X, Y], Y] \in \mathfrak{h}^2 = \{0\}$. Nos resta que $c = 0 \Rightarrow [X, Y] = 0$. Logo, $\mathfrak{h}$ é abeliana.

Da afirmação acima, segue que se $\mathfrak{h}$ é uma Álgebra de Lie Complexa nilpotente 2-dimensional, então $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_*$ é abeliana para $\mathfrak{g}$ de dimensão real 4.

***Proposição* 18.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie 2-dimensional. Então $\mathfrak{g}$ é abeliana ou existe uma base $\{X, Y\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[X, Y] = Y$.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie não abeliana e tome $\{X, Y\}$ uma base de $\mathfrak{g}$. Temos que $[X, Y] \neq 0$. Seja $[X, Y] = Y'$ e tome $X' \in \mathfrak{g}$, tal que $\{X', Y'\}$ forme uma base de $\mathfrak{g}$. Podemos escrever X' e Y' com relação a base $\{X, Y\}$. Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ em $\mathfrak{K}$ tais que $X' = \alpha X + \beta Y$ e $Y' = \gamma X + \delta Y$. Daí,

$$\begin{aligned} [X', Y'] &= [\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y] \\ &= (\alpha\gamma - \beta\delta)[X, Y] \\ &= (\alpha\gamma - \beta\delta)Y'. \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{g}$ é Álgebra de Lie não abeliana, temos

$$(\alpha\gamma - \beta\delta) \neq 0.$$

Então, podemos definir $A = (\alpha\gamma - \beta\delta)^{-1}X'$ e $B = Y'$.

Como

$$\begin{aligned} [A, B] &= (\alpha\gamma - \beta\delta)^{-1}[X', Y'] \\ &= (\alpha\gamma - \beta\delta)^{-1}(\alpha\gamma - \beta\delta)Y' \\ &= Y' = B, \end{aligned}$$

a base que procuramos é $\{A, B\}$.

***Teorema* 7.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie tridimensional cuja álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ é unidimensional. Suponha $\mathfrak{g}' \subset c(\mathfrak{g})$. Então existe uma base $\{X, Y, Z\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[Y, Z] = X, [X, Y] = 0$ e $[X, Z] = 0$ ou seja, $\mathfrak{g}$ é isomorfa à Álgebra de Heinsenberg.*

Demonstração: Sejam $\{X\}$ e $\{X, Y_1, Z\}$ bases de $\mathfrak{g}'$ e $\mathfrak{g}$ respectivamente. Como $\mathfrak{g}' \subset c(\mathfrak{g})$ e $X \in \mathfrak{g}'$ temos $[X, W] = 0$ para qualquer $W \in \mathfrak{g}$, e, em particular $[X, Y_1] = 0$ e $[X, Z] = 0$. Como $[Z, Y_1] \in \mathfrak{g}'$, temos que $[Z, Y_1] = aX$. Se $a = 0$, teremos $[Z, Y_1] = 0$. E daí para quaisquer $U, V \in \mathfrak{g}$ vale

$$[U, V] = [a_1X + a_2Y_1 + a_3Z, b_1X + b_2Y_1 + b_3Z] = 0.$$

Concluímos que $\dim(\mathfrak{g}') = 0$, contradizendo a hipótese. Logo, $a \neq 0$.

Definimos $Y = \frac{1}{a}Y_1$. Então, {X,Y,Z} também é uma base de $\mathfrak{g}$ e $[X, Y] = 0, [X, Z] = 0$ e

$$[Y, Z] = \frac{1}{a}[Y_1, Z] = \frac{1}{a}aX = X.$$

***Lema* 2.** *Se $\mathfrak{h}$ é uma Álgebra de Lie nilpotente 3-dimensional, então $\mathfrak{h}$ é no máximo 2-passos nilpotente. Em particular, $\mathfrak{h}$ é abeliana ou isomorfa à álgebra de Heisenberg.*

Se $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_*$ é Álgebra de Lie Complexa nilpotente e não abeliana 3-dimensional, segue do lema acima que $\mathfrak{g}_*$ é isomorfa à álgebra de Heisenberg. Ainda, $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ são isomorfas a álgebra de Heisenberg. Considere uma base $\{X_1, X_2, X_3\}$ de $\mathfrak{g}^{1,0}$, onde $X_k = Y_k - iJY_k$, com $k = 1, 2, 3$.

***Observação* 6.** *Considere uma base $\{X_1, X_2, X_3\}$ de $\mathfrak{g}^{1,0}$, onde $X_k = Y_k - iJY_k$, com $k = 1, 2, 3$. Note que $\{Y_1, Y_2, Y_3, JY_1, JY_2, JY_3\}$ é uma base de $\mathfrak{g}$.*

Como $\mathfrak{g}^{1,0}$ é isomorfa à álgebra de Heisenberg podemos supor, sem perda de generalidade que a base $\{X_1, X_2, X_3\}$ de $\mathfrak{g}^{1,0}$, como acima, é tal que

$$[X_1, X_2] = X_3$$

é o único colchete não nulo dos elementos desta base. Assim,

$$[Y_1 - iJY_1, Y_2 - iJY_2] = Y_3 - iJY_3,$$

daí,

$$\begin{aligned} & [Y_1, Y_2] - i[Y_1, JY_2] - i[JY_1, Y_2] \\ + \ & i^2[JY_1, JY_2] \\ = \ & Y_3 - iJY_3, \end{aligned}$$

então

$$\begin{cases} [Y_1, Y_2] - [JY_1, JY_2] &= Y_3 \\ [Y_1, JY_2] + [JY_1, Y_2] &= JY_3 \end{cases}$$

Deste modo,

$$[Y_1 * Y_2] = \frac{1}{2}([Y_1, Y_2] - [JY_1, JY_2]) = \frac{1}{2}Y_3$$

e

$$[Y_1 * JY_2] = \frac{1}{2}JY_3.$$

ISSN: 2763-8855
RΣCΣT Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas

Também, usando o fato de que $J^2 = -I$, segue que

$$[JY_1 * JY_2] = -\frac{1}{2}Y_3$$

e

$$[JY_1 * Y_2] = \frac{1}{2}JY_3.$$

Finalmente, de $[X_1, X_3] = [X_2, X_3] = 0$, temos $[Y_1 - iJY_1, Y_3 - iJY_3] = 0$. Então,

$$[Y_1, Y_3] - i[Y_1, JY_3] - i[JY_1, Y_3] + i^2[JY_1, JY_3] = 0.$$

Daí que,

$$[Y_1, Y_3] - [JY_1, JY_3] = 0$$

e

$$[Y_1, JY_3] + [JY_1, Y_3] = 0.$$

As igualdades acima nos fornecem, por exemplo

$$[Y_1 * Y_3] = \frac{1}{2}([Y_1, Y_3] - [JY_1, JY_3]) = 0.$$

Analogamente, verifica-se a nulidade dos demais colchetes de $\mathfrak{g}_*$.

A discussão acima nos ajuda a articular o teorema seguinte.

***Teorema* 8.** *Seja $\mathfrak{g}$ é uma Álgebra de Lie 6-dimensional com estrutura complexa J não-abeliana. Se J é s-passos nilpotente, então $s = 2$ e existe*

$$\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6\}$$

base de $\mathfrak{g}$, tal que os colchetes não nulos de $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ satisfazem

$$\begin{cases} [Z_1 * Z_2] = & [Z_3 * Z_4] = -Z_5 \\ [Z_1 * Z_3] = & [Z_4 * Z_2] = -Z_6. \end{cases}$$

Demonstração: Se J é s-passos nilpotente, segue que $\mathfrak{g}_*$ é s-passos nilpotente. Como $\mathfrak{g}_*$ é 3-dimensional sobre $\mathfrak{C}$, temos do lema 2, que $\mathfrak{g}_*$ é 2-passos nilpotente. Ainda, J é adaptada a $\mathfrak{g}_*$, logo é integrável. Segue da Definição 7 que J é 2-passos nilpotente. Também, o auto-espaço $\mathfrak{g}^{1,0}$ é subálgebra complexa de $\mathfrak{g}^{\mathfrak{C}}$, pois J é integrável. Se J é estrutura complexa não-abeliana, então $\mathfrak{g}_*$ é Álgebra de Lie não-abeliana. De $\mathfrak{g}^{1,0} \simeq \mathfrak{g}_*$, segue o isomorfismo entre $\mathfrak{g}^{1,0}$ e a álgebra de Heisenberg. Segue da discussão acima que $\mathfrak{g}$ admite uma base $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6\}$, com colchetes não-nulos dados por:

$$[Z_1 * Z_2] = [Z_3 * Z_4] = -Z_5 \quad (4)$$
$$[Z_1 * Z_3] = [Z_4 * Z_2] = -Z_6. \quad (5)$$

A verificação é imediata, basta tomar

$$\begin{array}{lll} Z_1 = Y_1 & Z_2 = Y_2 & Z_3 = JY_2 \\ Z_4 = JY_1 & Z_5 = \frac{-Y_3}{2} & Z_6 = \frac{-JY_3}{2}. \end{array}$$

Abaixo, temos um exemplo que satisfaz tanto as condições do Teorema 8, quanto as do Lema 2.

***Exemplo* 12.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie e seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ uma base de $\mathfrak{g}$, cujos colchetes satisfazem*

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -e_3\ [e_1, e_3] = -e_4\ [e_2, e_3] \\ &= -e_5\ [e_1, e_4] = [e_2, e_5] = -e_6. \end{aligned}$$

A estrutura complexa J, sobre $\mathfrak{g}$, tal que

$$Je_1 = -e_2\ Je_4 = -e_5\ Je_3 = -e_6,$$

é 2-passos nilpotente. De fato, note que J não é abeliana, caso contrário teríamos por exemplo,

$$\begin{aligned} -e_4 &= [e_1, e_3] = [Je_1, Je_3] \\ &= [-e_2, -e_6] = 0. \end{aligned}$$

Considerando a base $\{w_1 = e_1 - iJe_1, w_2 = e_4 - iJe_4, w_3 = e_3 - iJe_3\}$ de $\mathfrak{g}^{1,0}$, temos:

$$\begin{aligned} [w_1, w_2] &= 0 \\ [w_1, w_3] &= -w_2 \\ [w_2, w_3] &= 0. \end{aligned}$$

Em particular, a subálgebra de Lie $\mathfrak{g}^{1,0}$ é isomorfa à álgebra de Heisenberg.

Note que, $(\mathfrak{g}^{1,0})^2 = span\{w_2\}, (\mathfrak{g}^{1,0})^3 = 0$, o que mostra que $\mathfrak{g}^{1,0}$ é 2-passos nilpotente.

Também,

$$\begin{aligned} [e_1 * e_3]_J &= \frac{1}{2}([e_1, e_3] - [Je_1, Je_3]) \\ &= \frac{1}{2}((-e_4) - [-e_2, -e_6]) \\ &= -\frac{1}{2}e_4 \end{aligned}$$

Do mesmo modo, obtivemos os seguintes colchetes

$$\begin{aligned} [e_1 * e_3]_J &= -\frac{1}{2}e_4 \\ [e_6 * e_2]_J &= -\frac{1}{2}e_4 \\ [e_2 * e_3]_J &= -\frac{1}{2}e_5 \\ [e_1 * e_6]_J &= -\frac{1}{2}e_5. \end{aligned}$$

Podemos estabelecer um isomorfismo $\phi : \mathfrak{g}_* \longrightarrow \mathfrak{h}$, onde $\mathfrak{h}$ é dada como em (4). Basta definir $\phi(e_i) = Z_i$, para $i \in \{1, 2, 3\}$, $\phi(e_4) = 2Z_5$, $\phi(e_5) = 2Z_6$ e $\phi(e_6) = Z_4$.

ISSN: 2763-8855
REΣCET Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas

Note que

$$\begin{array}{rl} & J[e_1 * e_3]_J - [Je_1 * e_3]_J \\ - & [e_1 * Je_3]_J - J[Je_1 * Je_3]_J \\ = & J[e_1 * e_3]_J + [e_2 * e_3]_J + [e_1 * e_6]_J \\ - & J[e_2 * e_6]_J \\ = & -\frac{1}{2}Je_4 - \frac{1}{2}e_5 - \frac{1}{2}e_5 - \frac{1}{2}Je_4 \\ = & \frac{1}{2}e_5 - \frac{1}{2}e_5 - \frac{1}{2}e_5 + \frac{1}{2}e_5 \\ = & 0 \end{array}$$

Do mesmo modo, obtemos

$$\begin{array}{rl} & J[e_2 * e_3]_J - [Je_2 * e_3]_J \\ - & [e_2 * Je_3]_J - J[Je_2 * Je_3]_J = 0 \\ & J[e_1 * e_6]_J - [Je_1 * e_6]_J \\ - & [e_1 * Je_6]_J - J[Je_1 * Je_6]_J = 0 \\ & J[e_6 * e_2]_J - [Je_6 * e_2]_J \\ - & [e_6 * Je_2]_J - J[Je_6 * Je_2]_J = 0 \end{array}$$

E da nulidade dos demais colchetes $[*]_J$, afirmamos que J é integrável com relação a $\mathfrak{g}_*$. Com isso, J é 2-passos nilpotente.

Exemplos em que $\mathfrak{g}_*$ é nilpotente

Começaremos com uma preparação para construir exemplos relacionando as estruturas de $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ e $(\mathfrak{g}_*, [*])$. Para tanto, iniciaremos utilizando o Teorema 8.

Veremos como se comporta o colchete original $[\cdot,\cdot]$ para uma dada Álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ com base $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6\}$ e estrutura complexa integrável J cujo colchete $[*]_J$ satisfaz (4). Para isto, escrevemos:

$$JZ_i = \sum_{j=1}^{6} a_{ij}Z_j,\ 1 \le i \le 4 \tag{6}$$

$$JZ_5 = aZ_5 + bZ_6 \tag{7}$$

$$JZ_6 = cZ_5 + dZ_6, \tag{8}$$

já que $JZ_5 = -J[Z_1 * Z_2] = [JZ_1 * Z_2] \in \mathfrak{g}_*^2 = span\{Z_5, Z_6\}$ e do mesmo modo, garantimos que $JZ_6 \in span\{Z_5, Z_6\}$.

A princípio, vamos considerar

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & 0 & 0 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & 0 & 0 \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a & c \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & b & d \end{bmatrix}$$

É fácil ver que $a = -d$, já que $J^2 = -I$. De fato,

$$\begin{aligned} -Z_5 &= aJZ_5 + bJZ_6 \\ &= (a^2 + bc)Z_5 + (ab + db)Z_6. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{cases} a^2 + bc = -1 \\ b(a+d) = 0 \end{cases}$$

Se $b = 0$, teríamos $a = i$. Mas, $\mathfrak{g}$ é Álgebra de Lie real. Nos resta que $a = -d$.

Como J é adaptada a $\mathfrak{g}_*$, vale

$$\begin{aligned} 0 =& J[Z_1 * Z_1] \\ =& [a_{11}Z_1 + a_{12}Z_2 + a_{13}Z_3 + a_{14}Z_4 + a_{15}Z_5 \\ & + a_{16}Z_6 * Z_1]_J \\ =& a_{12}[Z_2 * Z_1]_J + a_{13}[Z_2 * Z_3]_J \\ =& a_{12}Z_5 + a_{13}Z_6, \end{aligned}$$

consequentemente $a_{12} = a_{13} = 0$. Temos também

$$-(aZ_5 + bZ_6) = -a_{11}Z_5 - a_{14}Z_6,$$

isso nos fornece $a_{11} = a, a_{14} = b$. Além disso,

$$-(cZ_5 + dZ_6) = -a_{11}Z_6 + a_{14}Z_5,$$

consequentemente $a_{11} = d = -a$, logo $a = d = 0$. Também, $a_{14} = -c$, logo $b = -c$.

Analogamente, obtemos $a_{21} = a_{22} = a_{24} = a_{31} = a_{33} = a_{34} = a_{42} = a_{43} = a_{44} = 0$ e $-a_{23} = a_{32} = a_{41} = c$

Assim, obtemos uma melhor representação matricial da estrutura complexa J.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & 0 & c \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & -c & 0 \end{bmatrix}$$

Para obter os valores dos demais coeficientes, usaremos o fato de que $J^2 = -I$.

$$\begin{aligned} JZ_1 =& -cZ_4 + a_{15}Z_5 + a_{16}Z_6 \Rightarrow \\ -Z_1 =& -c(cZ_1 + a_{45}Z_5 + a_{46}Z_6) + a_{15}(-cZ_6) \\ & + a_{16}cZ_5 \Rightarrow \\ 0 =& (1 - c^2)Z_1 + c(-a_{45} + a_{16})Z_5 \\ & + c(-a_{46} - a_{15})Z_6, \end{aligned}$$

daí $c = \pm 1$. Fazendo $c = 1$, por exemplo, temos $a_{16} = a_{45}$ e $a_{15} = -a_{46}$.

ISSN: 2763-8855

Também,

$$
\begin{aligned}
JZ_2 =& -cZ_3 + a_{25}Z_5 + a_{26}Z_6 \Rightarrow \\
-Z_2 =& -c(cZ_2 + a_{35}Z_5 + a_{36}Z_6) + a_{25}(-cZ_6) \\
& + a_{26}cZ_5 \Rightarrow \\
0 =& (1-c^2)Z_2 + c(-a_{35} + a_{26})Z_5 \\
& + c(-a_{36} - a_{25})Z_6,
\end{aligned}
$$

De $c = 1$, temos $a_{26} = a_{35}$ e $a_{25} = -a_{36}$.

Em suma,

$$
\begin{aligned}
JZ_1 &= -cZ_4 + a_{15}Z_5 + a_{16}Z_6 \\
JZ_2 &= -cZ_3 + a_{25}Z_5 - a_{26}Z_6 \\
JZ_3 &= cZ_2 + a_{26}Z_5 - a_{25}Z_6 \\
JZ_4 &= cZ_1 + a_{16}Z_5 - a_{15}Z_6 \\
JZ_5 &= -cZ_6 \\
JZ_6 &= cZ_5.
\end{aligned}
$$

Fazendo

$$
\begin{aligned}
X_1 &= Z_1 \\
X_2 &= Z_4 \\
X_3 &= Z_4 \\
X_4 &= Z_2 \\
X_5 &= Z_5 \\
X_6 &= Z_6,
\end{aligned}
$$

construímos novos colchetes

$$
\begin{aligned}
[X_1 * X_3] &= [X_4 * X_2] \\
&= -X_5 \text{ e} \\
[X_1 * X_4] &= [X_2 * X_3]] \\
&= -X_6.
\end{aligned}
$$

A representação matricial de J nesta nova base é dada por

$$
J = \begin{bmatrix}
0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\
0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\
n & m & q & p & 0 & c \\
m & -n & p & -q & -c & 0
\end{bmatrix}
$$

Podemos assumir $c = -1$, pois caso $c = 1$ podemos trocar $X_i \mapsto -X_i$, onde $(i = 2, 4, 6), m \mapsto -m, p \mapsto -p$. Reobteremos a matriz invertendo o sinal de c, sem afetar os colchetes.

Assim,

$$
J = \begin{bmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
n & m & q & p & 0 & -1 \\
m & -n & p & -q & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

Em particular, fazendo $m = n = p = q = 0$, temos que

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= Y_1 & JX_2 &= -X_1 JX_3 = X_4 \\
JX_4 &= -X_3 JX_5 = X_6 & JX_6 &= -X_5
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
-X_5 = [X_1 * X_3]_J &= \frac{1}{2}([X_1, X_3] - [JX_1, JX_3]) \\
&= \frac{1}{2}([X_1, X_3] - [X_2, X_4]),
\end{aligned}
$$

temos que

$$[X_1, X_3] = [X_2, X_4] - 2X_5.$$

Também,

$$
\begin{aligned}
-X_6 = [X_1 * X_4]_J &= \frac{1}{2}([X_1, X_4] - [JX_1, JX_4]) \\
&= \frac{1}{2}([X_1, X_4] + [X_2, X_3]),
\end{aligned}
$$

temos que

$$[X_1, X_4] = -[X_2, X_3] - 2X_6.$$

De

$$
\begin{aligned}
0 = [X_1 * X_5]_J &= \frac{1}{2}([X_1, X_5] - [JX_1, JX_5]) \\
&= \frac{1}{2}([X_1, X_5] - [X_2, X_6]),
\end{aligned}
$$

temos que

$$[X_1, X_5] = [X_2, X_6].$$

E, da nulidade dos colchetes $[X_1 * X_6]_J, [X_3 * X_5]_J, [X_3 * X_6]_J$, obtemos as respectivas igualdades

$$
\begin{aligned}
[X_1, X_3] &= [X_2, X_4] - 2X_5 \\
[X_1, X_4] &= -[X_2, X_3] - 2X_6 \\
[X_1, X_5] &= [X_2, X_6] \\
[X_1, X_6] &= -[X_2, X_5] \\
[X_3, X_5] &= [X_4, X_6] \\
[X_3, X_6] &= -[X_4, X_5].
\end{aligned}
$$

***Exemplo* 13.** *Seja $\mathfrak{g}$ um espaço vetorial real 6-dimensional e $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6\}$ uma base fixada de $\mathfrak{g}$. Então $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ é uma Álgebra de Lie se os colchetes não nulos são dados por*

$$[Z_1, Z_2] = Z_1, \ [Z_2, Z_4] = 2Z_5, \ [Z_2, Z_3] = -2Z_6.$$

E o endomorfismo $\bar{J} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ dado por

$$\bar{J}Z_1 = Z_2, \ \bar{J}Z_3 = Z_4, \ \bar{J}Z_5 = Z_6$$

é uma estrutura complexa sobre $\mathfrak{g}$.

Temos $\mathfrak{g}^2 = span\{Z_1, Z_5, Z_6\}$, e observando que $[Z_2, [Z_1, Z_2]] = -Z_1$, temos que $Z_1 \in \mathfrak{g}^3$, analogamente $Z_1 \in \mathfrak{g}^k$, para todo $k \geq 3$, mostrando que $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ não pode ser nilpotente. Porém, os colchetes não nulos de $(\mathfrak{g}, [*]_{\bar{J}})$ são

ISSN: 2763-8855
Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas

$$[Z_1 * Z_3]_{\bar{J}} = [Z_4 * Z_2]_{\bar{J}} = -Z_5 \text{ e}$$
$$[Z_1 * Z_4]_{\bar{J}} = [Z_2 * Z_3]_{\bar{J}} = -Z_6.$$

Como se verifica no Teorema 8, $(\mathfrak{g}, [*]_{\bar{J}})$ *é 2-passos nilpotente.*

Observamos que a Álgebra de Lie do exemplo 12 é nilpotente, então não é isomorfa à álgebra de Lie do exemplo 13. Mas ainda assim, podemos ver que $(\mathfrak{g}, [*]_J) \simeq (\mathfrak{g}, [*]_{\bar{J}})$.

***Exemplo* 14.** *Sejam* $\mathfrak{g}$ *uma Álgebra de Lie com colchetes não nulos dados por*

$$[e_2, e_4] = 2e_5 \text{ e } [e_2, e_3] = -2e_6.$$

Considere a estrutura complexa $J : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ *dada por*

$$Je_1 = -e_2 \; Je_4 = -e_5 \; Je_3 = -e_6.$$

Note que mesmo definindo a estrutura complexa do exemplo 12 , as Álgebras de Lie não são isomorfas, pois no exemplo 12, a álgebra era 4-passos nilpotentes e agora a Álgebra de Lie é claramente 2-passos nilpotente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Introduzimos os principais conceitos da teoria das Álgebras de Lie, o conceito e as propriedades de estruturas complexas sobre uma Álgebra de Lie real e vimos que no caso de uma estrutura complexa integrável J sobre uma Álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$, os auto-espaços $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ associados aos autovalores i e $-i$, respectivamente, são subálgebras complexas de $\mathfrak{g}^{\mathfrak{C}}$, onde $\mathfrak{g}^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C} \otimes \mathfrak{g}$.

Também, consideramos estruturas complexas integráveis J sobre Álgebras de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ e definimos um novo colchete de Lie $[*]_J$ sobre $\mathfrak{g}$ dado por:

$$[*]_J : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$
$$(X, Y) \longmapsto \frac{1}{2}([X, Y] - [JX, JY]).$$

Neste caso, denotamos a Álgebra de Lie obtida por $\mathfrak{g}_*$. A vantagem desse novo colchete é que J é adaptada a ele, de modo que $\mathfrak{g}_*$ passa a ser uma Álgebra de Lie Complexa. Vimos que a Álgebra de Lie $\mathfrak{g}_*$ é isomorfa tanto a $\mathfrak{g}^{1,0}$ quanto a $\mathfrak{g}^{0,1}$.

Munidos do colchete $[*]_J$, vimos que dada uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, tal que $\mathfrak{g}^{1,0}$(ou equivalentemente $\mathfrak{g}^{0,1}$) é uma subálgebra nilpotente de $\mathfrak{g}^{\mathfrak{C}}$, então $\mathfrak{g}$ é uma Álgebra de Lie solúvel. Para demonstrar este resultado, nos baseamos no Lema 1 devido a Goto para Álgebras de Lie semi-simples sobre corpos algebricamente fechados e de característica zero.

Além disso, caracterizamos as Álgebras de Lie solúveis 6-dimensionais que admitem estruturas complexas não abelianas. Vimos que se $\mathfrak{g}$ é uma Álgebra de Lie 6-dimensional e J é uma estrutura complexa integrável s-passos nilpotente (neste caso, equivale a $\mathfrak{g}_*$ ser s-passos nilpotente) então, J é 2-passos nilpotente e existe uma base $\{Z_1, ..., Z_6\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que os colchetes não nulos de $(\mathfrak{g}, [*])_J$ são dados por

$$[Z_1 * Z_2] = [Z_3 * Z_4] = -Z_5 \text{ e}$$
$$[Z_1 * Z_3] = [Z_4 * Z_2] = -Z_6.$$

De acordo com este resultado, Edson Licurgo e Luiz San Martin verificaram o comportamento dos elementos da base $\{Z_1, \ldots, Z_6\}$ de $\mathfrak{g}$ para os colchetes não nulos de $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ (LICURGO S. E. C.; MARTIN, 2011). Neste sentido, no presente trabalho, construímos detalhadamente estes resultados.

Considerando o comportamento desta base, com respeito ao colchete de Lie original, foram construídos exemplos de Álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão 6 com estrutura complexa satisfazendo as condições dos teoremas 6 e 8.

Referências

ANDRADA, A.; BARBERIS, M. L. **Abelian hermitian geometry**. *Differential Geometry and its Applications*, v. 30, n. 5, p. 509–519, 2012. Citado na página 2.

BARBERIS, M. L.; DOTTI, I. **Abelian complex structures on solvable Lie algebras**. *Journal of Lie Theory*, v. 1, n. 14, p. 25–34, 2004. Citado na página 2.

FINO A.; DOTTI, I. G. **Hypercomplex nilpotent Lie groups**. *Contemp. Math*, n. 28, p. 310–314, 2001. Citado na página 2.

LICURGO, E. C. S. ***Estruturas complexas com auto-espaços nilpotentes e solúveis***. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 2, 8 e 11.

LICURGO S. E. C.; MARTIN, L. A. B. S. **Lie algebras with complex structures having nilpotent eigenspaces**. *Proyecciones (Antofagasta)*, v. 2, n. 30, p. 247–263, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 16.

MARTIN, L. A. B. S. ***Álgebras de Lie***. Campinas, SP: Unicamp, 2010. Citado 5 vezes nas páginas 3, 4, 5, 7 e 11.

ISSN: 2763-8855

RECET Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas