

A INFLUÊNCIA DE PROCLUS DURANTE A RECEPÇÃO DOS ELEMENTOS DE EUCLIDES NO SÉCULO XVI

Douglas Lisboa Santos de Jesus¹

Universidade do Estado da Bahia (UNEB)

 <https://orcid.org/0009-0007-5579-1398>

E-mail: douglas.lisboasj@gmail.com

RESUMO:

O artigo argumenta que a importância de Proclus se reflete na maneira como os *Elementos* passaram a ser interpretados e modificados, especialmente no que diz respeito ao tratamento dos primeiros princípios, como definições, postulados e noções comuns. A influência de Proclus também é evidente nas objeções ao estatuto indemonstrável do Postulado das Paralelas e na doutrina das definições genéticas, que serve ao propósito de reduzir os postulados de Euclides às suas definições. O artigo conclui apontando para outros desdobramentos filosóficos a partir dessa discussão sobre a geometria euclidiana, como o início das tentativas modernas de aplicação do método geométrico à metafísica.

PALAVRAS-CHAVE: Proclus; Elementos de Euclides; Modernidade; Matemática; Epistemologia.

THE INFLUENCE OF PROCLUS DURING THE RECEPTION OF EUCLID'S ELEMENTS IN THE SIXTEENTH CENTURY

ABSTRACT:

The article argues that the importance of Proclus is reflected in the way the *Elements* were interpreted and modified, especially with regard to the treatment of first principles, such as definitions, postulates, and common notions. The influence of Proclus is also evident in the objections to the undemonstrable status of the Parallel Postulate and in the doctrine of genetic definitions, which serves the purpose of reducing Euclid's postulates to his definitions. The article concludes by pointing to other philosophical developments from this discussion of Euclidean geometry, such as the beginning of modern attempts to apply the geometric method to metaphysics.

KEYWORDS: Proclus; Euclid's Elements; Modernity; Mathematics; Epistemology.

¹Doutor(a) em Filosofia pela Universidade Federal da Bahia (UFBA), Salvador – BA, Brasil. Professor(a) da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), Salvador – BA, Brasil.

Introdução

Nos últimos anos tem se verificado um maior interesse pela recepção dos *Elementos* de Euclides no início da Modernidade. Isso se deve, em parte, à necessidade de contextualizar as inovações teóricas de pensadores como Descartes e Leibniz. Em outros casos, como no recente livro de Lassalle Casanave, pretende-se ambientar as objeções de Kant ao uso do método geométrico por parte dos metafísicos racionalistas. A recepção moderna dos *Elementos* pode ser também uma oportunidade de trazer à tona a influência do filósofo platônico Proclus naquele que seria o episódio mais famoso da geometria euclidiana: as tentativas de demonstrar o Postulado das Paralelas. Pietro Riccardi oferece uma lista com vários autores que tentaram demonstrar aquele postulado entre os séculos XVII e XIX, mas sem traçar uma conexão filosófica satisfatória².

A Era Moderna é marcada por uma abundância de versões dos *Elementos*. No século XVI, centenas de manuscritos gregos vindos de Constantinopla em direção à Península Itálica, somados a outras traduções feitas das línguas árabe e persa nos séculos XII e XIII estavam disponíveis para estudo. Dos manuscritos reunidos nas grandes bibliotecas da Itália emergiram três tradições dos *Elementos*: a de Campano, publicada em 1482 por Erhard Ratdolt; a de Giorgio Valla (1447-1500), publicada postumamente e popularizada por Bartolomeo Zamberti (1473-1543); a primeira edição (*editio princeps*) do texto grego euclidiano, publicada por Simon Grynaeus (1493 - 1541), em 1533. Essa foi a edição mais longeva dos *Elementos*, servindo de base para a maioria das traduções que mencionaremos aqui.

A recepção dos *Elementos* de Euclides nos séculos XVI e XVII se deu no âmbito da ciência demonstrativa aristotélica descrita nos *Analíticos posteriores*. Não obstante, paralelamente ao renascimento das matemáticas ocorreu o renascimento do pensamento platônico. Daí a importância de Proclus. Isso se refletiu na maneira como os *Elementos* passou a ser interpretado e modificado. Apesar de já ser conhecido na Europa desde o século XIII, Proclus só se estabeleceu como uma autoridade importante no início da Era Moderna, especialmente entre aqueles que buscavam reabilitar o pensamento platônico, como Nicolau de Cusa, Basílio Bessarion, Marsilio Ficino (1433 - 1499), Giovanni Pico della Mirandola (1470 - 1533) e Francesco Patrizi (1529 - 1597). O Comentário de Proclus ao Livro I dos *Elementos* de Euclides tornou-se uma fonte essencial de estudo da geometria euclidiana, a principal fonte historiográfica da matemática antiga e uma referência para a filosofia da matemática de Platão. O texto de Proclus foi comentado e traduzido por figuras como Giorgio Valla, Dasypodius e Johannes Kepler, e até mesmo lido por Galileu e Descartes.

A primeira e mais clara influência de Proclus sobre os comentários modernos dos *Elementos* está no tratamento dos primeiros princípios, quais sejam, definições, postulados e noções comuns (também chamados axiomas). A rigor, os Postulados 1-3 não são proposições, mas antes frases a respeito de operações que podem ser feitas para construir retas, prolongações e circunferências. São chamados, por isso, postulados de construção. Em razão dessa diferença, o filósofo platônico Proclus, ainda na Antiguidade, argumentou que a lista de Euclides deveria se restringir a apenas os postulados construtivos; os Postulados 4 e 5 deveriam ser demonstrados. Deve-se também a Proclus a tese segundo a qual os postulados e noções comuns (ou axiomas) podem ser demonstrados a partir de definições, uma clara violação da doutrina aristotélica exposta no Livro I dos *Analíticos posteriores* segundo a qual os três tipos de princípios são indemonstráveis. Não obstante isso, a tese de Proclus fora defendida pelos principais comentadores de Euclides a partir

² Riccardi, *Saggio di una bibliografia euclidea*, Parte IV, 1890.

do século XVI, indo das famosas edições de Federico Commandino (1572) e Cristóvão Clávio (1574 e 1589) até os tratados de Leibniz e Wolff.

Na próxima seção, destacamos a importância do renascimento do conhecimento matemático no século XVI. Durante uma primeira fase, o objetivo dos humanistas era estabelecer um texto-base que pudesse corrigir as supostas imperfeições deixadas pelos medievais. Por essa razão, ressaltamos também na Seção 3 algumas diferenças entre as edições medievais e modernas dos *Elementos*. A Seção 4 traz as principais objeções de Proclus quanto ao estatuto indemonstrável do Postulado das Paralelas. Mostramos como isso repercute nas principais traduções de Commandino e Clávio. De particular importância é a doutrina das definições genéticas, a qual serve ao propósito de reduzir os postulados de Euclides às suas definições. Por fim, a Seção 5 aponta para outros desdobramentos filosófico a partir dessa discussão sobre a geometria euclidiana. Verifica-se aí, com efeito, o início das tentativas modernas de aplicação do método geométrico à metafísica.

O renascimento do conhecimento matemático no século XVI

Após a Queda de Constantinopla, em 1453, o êxodo de intelectuais acelerou o processo de assimilação do conhecimento grego na Europa, especialmente na Itália, favorecida por sua posição geográfica. Os *Elementos* de Euclides era o principal tratado de matemática teórica estudado na Europa desde o século XIII, quando traduções árabes chegaram da Península Ibérica e do Oriente Médio. Isso começou a mudar na segunda metade do século XV graças a cientistas e filósofos que buscavam inspiração nas doutrinas de Platão. Dentre os principais pensadores que passaram por Roma entre 1461 e 1462 constam os nomes de Basílio Bessarion (1403 – 1472), Paolo dal Pozzo Toscanelli (1397 – 1482), Leon Battista Alberti (1404 - 1472), na época secretário apostólico de Pio II, Nicolas de Cusa (1401 – 1464) e Regiomontano (Johannes Müller, 1436 – 1476). Por outro lado, não se pode subestimar a importância dos humanistas para essa revitalização da matemática sob o pretexto de não se ter introduzido nenhuma novidade relativamente a técnicas de resolução de problemas nesse período³. Na verdade, os humanistas não só incentivaram os estudos das matemáticas, como encontraram aí uma ferramenta supostamente mais apropriada à ciência do que a lógica aristotélica e suas “frivolidades”.

Muito antes de Bessarion disponibilizar sua biblioteca para a consulta dos intelectuais italianos, Giovanni Aurispa (1376 - 1459) viajou a Bizâncio, de onde levou centenas de códices gregos. Dentre as novidades, os manuscritos de Plotino, Iâmbico e Proclus, além de textos supostamente pertencentes a Arquimedes e um outro matemático antigo que Aurispa não soube identificar — tratava-se de Pappus de Alexandria⁴. Francesco Filelfo (1398 - 1481) lista entre os seus manuscritos as *Cônicas* de Apolônio⁵. Aliás, vale registrar que Filelfo faz uma das primeiras menções à tese heliocêntrica presente nos textos do astrônomo grego Aristarco de Samos. Muitos outros manuscritos foram descobertos por diferentes eruditos⁶. Dentre os manuscritos dessa época estão versões dos *Elementos*, em grego e em latim, obras de Leonardo Fibonacci (*Liber Acaci e Practica geometricae*), assim como versões gregas do *Almagesto* e da *Geografia*, ambos de Ptolomeu⁷. Ao longo do século XVI, Giorgio Valla e Federico Commandino ajudariam a divulgar

³ Sobre a importância dos humanistas para o desenvolvimento da matemática moderna, ver Paul Lawrence Rose, *Humanist Culture and Renaissance Mathematics: The Italian Libraries of the Quattrocento*. *Studies in the Renaissance*, 20, 1973, p. 46–105.

⁴ Carta de Aurispa a Ambrogio Traversari (1386 – 1439), 27 de agosto de 1424. Ver *Carteggio di Giovanni Aurispa*. Roma, 1931.

⁵ Traversari, *Epistolae*, II, cols. 1010-1011.

⁶ Vários manuscritos desta época foram reunidos por eruditos associados ao filósofo bizantino Manuel Chrysoloras (aprox. 1350 – 1415), como Coluccio Salutati, Antonio Corbinelli e Palla Strozzi (1372 - 1462).

⁷ Em 1451, Jorge de Trebizonda finalizou uma tradução, acompanhada de comentário, da *Sintaxis Mathematica* (ou *Almagesto*), de Ptolomeu. O trabalho foi patrocinado pelo Papa Nicolau V e usou um manuscrito da biblioteca de Basílio Bessarion. Em 1538

o conhecimento matemático antigo com traduções de Aristarco de Samos⁸, Arquimedes⁹, Herão de Alexandria¹⁰, Apolônio e Pappus¹¹; Cleômedes¹², Diofanto e Nicômedes também seriam traduzidos durante essa época.

No tocante aos *Elementos* de Euclides, a primeira missão do renascimento da matemática seria determinar qual versão era a mais fiel. Para tanto, era imperativo recorrer a Proclus, num contexto de franca ascensão do platonismo. A biblioteca com mais manuscritos era a Biblioteca Vaticana, cuja estrutura e coletânea pertenciam à biblioteca particular de Nicolau V (Tommaso Parentucelli, 1397 – 1455). Nicolau patrocinou vários humanistas, empregando muitos deles, como passaria a ser costumeiro, em secretarias e chancelarias, como no caso de Lorenzo Valla (1407 – 1457)¹³, um dos mais ferrenhos opositores da lógica aristotélica. Nicolau V enviou emissários ao Oriente para ajudar a trazer intelectuais refugiados após a Queda de Constantinopla. O patrocínio papal às artes e aos humanistas continuou com Pio II (Enea Silvio Bartolomeo Piccolomini, 1405 – 1464) e Sixto IV (Francesco della Rovere, 1414 – 1484), que retomou e concluiu o estabelecimento da Biblioteca do Vaticano, escolhendo para curador Bartolomeo Platina. Entre o papado de Nicolau V e Sixto IV vários manuscritos foram incluídos, dentre os quais textos de Apolônio, Diofanto — que viria a ser traduzido e comentado por François Viète, considerado um dos fundadores da álgebra moderna —, Aristarco de Samos e o Manuscrito 190 dos *Elementos*, pertencente a uma tradição não-theonina desconhecida por Proclus. Manuscritos gregos de Herão e Pappus seriam incluídos no século seguinte¹⁴.

A nobreza italiana também teve papel importante no renascimento das matemáticas. Um dos mais importantes mecenas do renascimento italiano foi Cosimo di Giovanni de' Medici (1389 – 1464), que financiou a publicação de toda a obra de Platão, bem como a de Plotino e alguns textos de Proclus. Guidobaldo I de Montefeltro, Duque de Urbino, foi mecenas de Luca Pacioli, Federico Commandino e Guidobaldo del Monte. Pacioli e Commandino publicaram traduções dos *Elementos*, ao passo que Guidobaldo del Monte traduziu Arquimedes. Outro nobre digno de

foi publicada uma versão francesa do comentário de Theon de Alexandria sobre o *Almagesto*. A *Geografia* de Ptolomeu estava sob posse de Palla Strozzi e foi adquirida pelo Duque Federico de Urbino, chegando, assim, às mãos de Federico Commandino. Ver Rose, *The Italian Renaissance of Mathematics: Studies on Humanists and Mathematicians from Petrarch to Galileo*, Genève, 1975, p. 41-42.

⁸ Giorgio Valla e Federico Commandino, separadamente, publicaram traduções de *De magnitudinis et distantis solis et lunae*. Convém lembrar que esse texto de Aristarco é a principal referência da tese heliocêntrica na Grécia Antiga. Ver Argante Ciocci, Federico Commandino and his Latin edition of Aristarchus's *On the Sizes and Distances of the Sun and the Moon*. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 77, n. 1, p. 1-23, 2023.

⁹ Por volta de 1450 Jacopo da San Cassiano Cremonensis traduz os textos de Arquimedes. Giorgio Valla foi um dos primeiros humanistas a se interessar por Arquimedes. Ele tinha acesso ao manuscrito de Moerbeke e provavelmente o de Jacopo; ademais, ele poderia usar o Comentário de Proclus, ao qual também tinha acesso, para tentar oferecer um contexto mais amplo das contribuições arquimedianas para além da construção de maquinários bélicos. Em 1503, Luca Gaurico publicou *Quadratura parabolae e Dimensio Circuli* (seguindo a tradução de Moerbeke). Em 1543, Tartaglia republicou essas traduções e acrescentou *De planorum aequilibriis e De Corporibus Fluitantibus*, Livro I. (também seguindo Moerbeke). Em 1560, Tartaglia publicou o Livro I de *De sphaera et cylindro* como o Livro III de *La quarta parte del general trattato*. A *editio princeps* dos textos arquimedianos foi publicada por Thomas Gechauff Venatorius (Basiléia, 1544). O texto grego foi acompanhado pela tradução latina de Jacopo. Em 1558 e 1565, Federico Commandino publicaria uma tradução parcial dos textos. Commandino publicaria uma tradução dos *Elementos* apenas em 1572. Ver Martin Frank, The Curious Case of QP. 6: The Reception of Archimedes' Mechanics by Federico Commandino and Guidobaldo dal Monte, *Revue d'histoire des sciences*, v. 68, n. 2, p. 419-446, 2015; Ciocci, A., Federico Commandino and the Latin edition of Apollonius's *Conics* (1566), *Archive for History of Exact Sciences*, p. 1-29, 2023.

¹⁰ Commandino publicou uma tradução em 1575.

¹¹ Commandino publicou a Coleção de Pappus em 1588.

¹² *De motu circulari corporum caelestium* foi traduzido por Valla (Veneza, 1498).

¹³ Valla também foi funcionário de Alfonso I da Sicília. Além do serviço puramente intelectual que colocavam a serviço dos seus respectivos mecenas, os humanistas também se prestavam ao ofício de logógrafos, o que era possível graças ao prestígio que gozavam junto às elites italianas. Valla é mais conhecido atualmente por refutar a autenticidade da Carta de doação de Constantino.

¹⁴ Por outro lado, Paul Lawrence Rose afirma que uma nova política do Vaticano relativamente aos empréstimos de manuscritos, muito mais restritiva, dificultou o acesso de estudiosos aos manuscritos. No caso de Commandino, porém, o desconhecimento de alguns manuscritos no Vaticano se deve ao fato dele não ter arredado o pé de Urbino.

destaque foi Alfonso, o Grande, Rei de Nápoles, que patrocinou George de Trebizonda, Chrysoloras e Lorenzo Valla.

A biblioteca de Bessarion, egresso de Bizâncio, continha manuscritos de quase todos os matemáticos gregos, a exceção sendo Pappus. Bessarion foi um dos grandes divulgadores do pensamento platônico durante a Renascença; ele vai reforçar em *In calumniatorem Platonis* que não se pode compreender Platão sem compreender as matemáticas (e vice-versa). Bessarion possuía uma cópia dos comentários de Proclus¹⁵. A biblioteca de Giorgio Valla, em Piacenza, também continha manuscritos de Euclides (*Elementos* e *Dados*) e Proclus¹⁶. A biblioteca do duque Federico da Montefeltro de Urbino (1422 - 1482) era frequentada por Luca Pacioli e seu amigo mais famoso, Leonardo da Vinci; as traduções publicadas por Federico Commandino, dentre as quais uma versão bem recebida dos *Elementos*, usaram os manuscritos dessa biblioteca.

Há no século XVI uma abundância de novas versões dos *Elementos*, marcada pela disparidade entre elas e por constantes intervenções no texto euclidiano, que podem ser classificadas em dois grupos: as filológicas e as filosóficas¹⁷. As intervenções filológicas, como já esclarecido, pretenderam restabelecer uma versão fiel, ou o mais fiel possível, dos *Elementos*, o que exigiria comparações entre os vários manuscritos para que as interpolações fossem identificadas e eliminadas. Nesse particular, dever-se-ia usar como referência o comentário de Proclus. Os princípios que estivessem nos comentários de Proclus, mas não estivessem nos *Elementos*, ou vice-versa, passariam a ser considerados interpolações. Um bom exemplo no início da Modernidade é oferecido pelo matemático português Francisco de Melo (ca. 1490 - 1536), que deixou comentários a Euclides (*Ótica* e *Catóptrica*) e pseudo-Arquimedes. Diz ele:

[...] [D]esde há já algum tempo, entre as obras completas de Euclides, Príncipe dos Matemáticos, lêem-se as suas *Especulária* [*Catóptrica*] e *Perspetiva* [*Ótica*], redigidas com admirável concisão e magnífica disposição, traduzidas para Latim pelo veneziano Bartolomeo Zamberto, com as demonstrações do distinto matemático Teão. Estas, contudo, estão tão confusas e mutiladas, seja por descuido dos copistas, seja por corrupção do códice grego, que penso que o próprio Teão não as reconheceria, se fosse vivo. Além disso, em nada contribuem para clarificar o entendimento dos teoremas matemáticos; pelo contrário, impedem completamente a interpretação destes se as tomares por base; [por isso] mais vale excogitar provas completamente novas, a atormentar o engenho excessivamente e durante muito tempo em tradições não fidedignas¹⁸.

As intervenções filosóficas, por outro lado, assumiram desde o início a missão de “corrigir” as “imperfeições” do próprio Euclides. Dentre essas imperfeições estariam a ausência de axiomas no Livro V, que contém a teoria das proporções, e nos Livros VII-IX, concernentes à aritmética; a ausência de demonstrações dos Postulados 4 e 5 (o das paralelas), como havia proposto Proclus; a ausência de axiomas relativos a interseção entre linhas, bem como novos axiomas de congruência e transposição de figuras. Alguns destes princípios antecipam axiomas contemporâneos, como, por exemplo, as relações de incidência e intersecção.

¹⁵ Ainda há registros dos manuscritos que Commandino tomou emprestado da biblioteca de Bessarion. Ver Rose, *Humanist Culture and Renaissance Mathematics: The Italian Libraries of the Quattrocento*. Studies in the Renaissance, v. 20, 1973, p. 94.

¹⁶ Esse catálogo foi comprado depois pela biblioteca Pio da Carpi; os códices gregos foram parar na Biblioteca Estense em Modena. A tradução de Bartolomeu Zamberti, de Veneza, vem daí. Sabe-se que Zamberti chegou a trabalhar numa tradução dos comentários de Proclus em 1539.

¹⁷ Uma lista exaustiva das edições e traduções dos *Elementos* encontra-se em De Risi (2016)

¹⁸ Prefácio ao *Comentário à Perspetiva de Euclides*. Embora não seja um autor muito conhecido, uma vez que seus comentários foram praticamente dados como desaparecidos, Francisco de Melo gozou de amplo reconhecimento na Europa do séc. XVI, dentro e fora de Portugal. Gil Vicente refere-se a ele no prólogo do *Auto da Feira*, dando-lhe um destaque especial, como também o faz seu conterrâneo, o humanista André de Resende em *Oratio pro Rostris*, de 1534. Outro exemplo, desta vez na França, é o texto publicado por Pierre Forcadel em 1565, *Le premier livre d'Archimède, des choses également pesantes*. O texto, na verdade, é uma tradução do comentário de Francisco de Melo sobre a mesma obra atribuída falsamente a Arquimedes.

Os dois tipos de intervenção têm nos comentários de Proclus a principal referência sobre como o texto euclidiano deveria ser interpretado. Para dar conta das diferenças nos manuscritos euclidianos, a solução encontrada era confiar no *Comentário* de Proclus. Apesar de seu nome já ser conhecido na Europa desde o século XIII, graças às traduções de Guilherme de Moerbeke do *Tria opuscula*, *Elementatio theologica*, e dos comentários ao *Parmênides* e ao *Timeu* (apenas parte), foi só a partir do início da Era Moderna que Proclus foi consolidado como uma das principais autoridades antigas para aqueles que desejavam reabilitar o pensamento platônico, rejeitar a filosofia aristotélica, ou, como geralmente era o caso, as duas coisas, como Nicolau de Cusa, Basílio Bessarion, Marsilio Ficino (1433 – 1499), Giovanni Pico della Mirandola (1470 – 1533) e Francesco Patrizi (1529 – 1597)¹⁹. É nesse contexto que se deve pensar a recepção do *Comentário* ao Livro I dos *Elementos* de Euclides. Este texto tornou-se já no século XVI não só uma importante fonte de estudo sobre os *Elementos*, mas até mesmo a principal fonte historiográfica da matemática antiga, bem como uma referência para a filosofia da matemática de Platão, além de oferecer uma classificação das ciências matemáticas²⁰. Com efeito, o texto de Proclus será comentado e traduzido, parcial ou integralmente, direta ou indiretamente, por nomes como o humanista Giorgio Valla, Dasypodius e Johannes Kepler²¹. De fato, Proclus seria lido também por Galileu e Descartes.

A chegada dos textos de Proclus e os de Euclides (agora no grego) coincide com a redescoberta das obras de Platão, Plotino, Epicuro (através do recém-descoberto texto de Diógenes Laércio), Lucrécio e Sexto Empírico, autores que ajudam a radicalizar as críticas já existentes à concepção aristotélica de ciência. Não obstante, a maioria dos comentadores de Euclides reivindicavam o pertencimento à tradição aristotélica. São exemplos Giorgio Valla, Bartolomeo Zamberti, Jacques Peletier du Mans, Cristóvão Clávio, Giuseppe Biancani, Conrad Dasypodius, Henry de Savile, Isaac Barrow e Alfonso Borelli. Todavia, esses autores não entendiam que fosse necessário fazer uma completa reconstrução do método inferencial usado na obra euclidiana através da exposição silogística de suas demonstrações. A recepção do texto de Proclus abriu um importante precedente para se considerar novos métodos nas ciências exatas, o que se nota nas versões dos *Elementos* publicados desde o século XVI.

¹⁹ Diz-se que George Gemistus Pletho sugeriu a Cosimo de' Medici a criação da Academia Platônica em Florença. Cosimo, por sua vez, encarregou Marsilio Ficino da tradução da obra completa de Platão e Plotino. Assim sendo, em 1484 Marsilio Ficino publicou, através de Antonio Miscomini e com o financiamento de Lorenzo de' Medici, a *editio princeps* dos diálogos de Platão. Em 1492, foi publicada a tradução latina da *Enéadas* de Plotino. A pedido de Nicolau de Cusa, Pietro Balbi traduziu pela primeira vez *Theologia platonica*, de Proclus. Um dos principais livros de Ficino tem como título *Theologia platonica de immortalitate animorum* (1482). Ainda sobre textos de Proclus traduzidos, Paolo Beni (1552 - 1625), traduziu partes do *Comentário ao Timeu*. Uma nova tradução é publicada por Nicolaus Scutellius (1490 - 1542), que também traduz no período os *Comentários ao Parmênides*, ao *Primeiro Alcibiades* e à *República*.

²⁰ Há ainda dois manuscritos não mencionados por Morrow que contêm traduções integrais do *Comentário* de Proclus e antecedem o texto de Barozzi: o de Zamberti, o de Giovanni Battista Gabia e o de Jerónimo Muñoz. Sobre a recepção deste texto, ver Álvaro José Campillo Bo. *The Forgotten Gifts of Hermes: The Latin Reception of Proclus' Commentary on Euclid's Elements. Mediterranea. International Journal on the Transfer of Knowledge* 8, p. 193-278, 2023.

²¹ Kepler, *Harmonices mundi libri V*, 1619. Nessa obra, Proclus é mais citado do que Platão e Plotino. Vide, em especial, citações a Proclus nos Livros I, III e IV. A respeito da influência de Proclus sobre Kepler, ver Guy Claessens, *Imagination as self-knowledge: Kepler on Proclus' Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, *Early Science and Medicine*, 16/3 (2011), p. 179 – 199; do mesmo autor, *Reception and the Textuality of History: Ramus and Kepler on Proclus' History and Philosophy of Geometry*, in André Lardinois et al (eds.), *Texts, Transmissions, Receptions: Modern Approaches to Narratives*, Leiden, 2015, p.281–294. Ver também Wolfgang Osterhage, *Johannes Kepler: The Order of Things*, Springer, Dordrecht, 2020.

As versões modernas dos *Elementos*

Euclides abre o Livro I dos *Elementos* com a explicitação de três tipos de primeiros princípios: as definições, os postulados, e as noções comuns²². Com exceção dos Livros VIII-IX e XII-XIII, os demais são prefaciados por uma lista de definições relativas aos entes matemáticos sob investigação. Nos manuscritos mais antigos, aqueles cujas cópias datam do século IX, nenhum outro postulado ou noção comum é acrescentado. A atual edição crítica do texto euclidiano contém 5 postulados:

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

As primeiras edições completas dos *Elementos* em latim surgiram ao longo do século XII. Esta época é marcada pela redescoberta do conhecimento antigo através da tradução dos vários tratados árabes que passaram a circular na Europa a partir da Península Ibérica e do reino normando da Sicília²³. Até 1482, quando Erhard Ratdolt publica a primeira versão impressa dos *Elementos* — duas outras edições aparecem em 1486 (Ulm) e 1491 (Basiléia) —, a obra euclidiana circulou na Europa ocidental em pelo menos quatro versões. A primeira delas é atribuída a Adelardo de Bath, de aproximadamente 1120. Essa tradução vem do texto árabe de Al-Nairizi²⁴

²² Para a edição crítica dos *Elementos*, ver Johan Ludvig Heiberg, *Euclidis Elementa*. In: Johan Ludvig Heiberg & Heinrich Menge, *Euclidis Opera Omnia*. Lipsiae: B.G. Teubneri, Volumes I-IV, 1883. Consultou-se também a tradução de Thomas L. Heath, *The Thirteen Books of the Elements*. Cambridge: Cambridge University Press, 1908, 3 Vols. Os princípios e proposições serão citados da seguinte maneira: numeral romano seguido de numeral indo-arábico (por exemplo, Definição I.1, Proposição I.2, etc.).

²³ O texto de Euclides foi enviado de Constantinopla para o Califado Abássida em Bagdá no século IX. A primeira fonte de informações sobre as traduções árabes é o *Catálogo* de al-Nadim. Segundo ele, os *Elementos* viria a receber duas traduções por al-Hajjāj Ibn Yūsuf Ibn Matar (f. 786 – 830). Especula-se que as primeiras edições medievais latinas, especialmente as de Abelardo, e hebraicas dos *Elementos* tomaram por base o texto de al-Hajjāj. Vale a pena acrescentar que al-Hajjāj foi também o responsável pela primeira tradução do *Sintaxis Mathematica* de Ptolomeu, obra conhecida pelo título *Almagesto* em razão da tradução árabe. Ao longo da segunda metade do século IX surgiu uma nova tradução, desta vez preparada por Ishāq Ibn Hunayn (809 – 873) e revisada por Thabit Ibn Qurra (c. 830 - 901). al-Nadim não explica os motivos de uma nova tradução em tão curto espaço de tempo. De acordo com Sonja Brentjes, a chamada tradição Ishaq/Thabit viria a exercer uma influência mais profunda na agenda investigativa da matemática muçulmana medieval. O texto preparado por Gerardo da Cremona segue esta tradição. Ao final do século XIII aparecem duas traduções do polímata persa Nasir al-Din al-Tusi (1201 - 1274). O que destaca essas traduções em relação às duas outras do século IX, segundo Sonja Brentjes, é que al-Tusi não se importou em ser fiel ao texto de Euclides, seja em relação à linguagem usada, seja na maneira de expor as demonstrações. Na maioria das vezes, as demonstrações de al-Tusi são abreviadas; há também o acréscimo de novos raciocínios, de novas definições e novos lemas. Não se trataria, portanto, de apenas um *scholium*. Como Brentjes nota, esse procedimento não se mostra compatível com a recepção dos clássicos na Idade Média, contudo pouco se discute acerca das motivações de tamanhas modificações. Seja como for, o texto de al-Tusi não parece ter alcançado a Europa durante a Idade Média, mas seria publicado através da imprensa dos Médici no século XVI. Nasir al-Din al-Tusi deixou também traduções de Arquimedes, Ptolomeu e Autólico. Ver Sonja Brentjes, *Arabic and Arabo-Latin Translations of Euclid's Elements*, In G. W. Most, D. Schäfer, & M. Söderblom Saarela (Eds.), *Plurilingualism in Traditional Eurasian Scholarship: Thinking in Many Tongues*, Leiden, p. 376-387, 2023.

²⁴ Para essa exposição, adota-se Marshall Clagett, *The medieval Latin translations from the Arabic of the Elements of Euclid, with special emphasis on the versions of Adelard of Bath*, *Isis*, v. 44, n. 1/2, p. 16-42, 1953. Como nota Clagett, a Versão I, seria o resultado da tradução (quase) ao pé da letra duma das primeiras versões árabes do texto euclidiano, a de al-Hajjāj, e foi compilada aproximadamente entre 1126 e 1130. Essa opinião é compartilhada por Busard, responsável pela atual edição crítica da Versão I. Ver H. L. L. Busard (Ed.), *The First Latin Translation of Euclid's Elements commonly ascribed to Adelard of Bath. Books I-VIII and Books X.36-XV.2*, Toronto, 1983. A imprensa dos Médici (*Typographia Medicea*, posteriormente *Typographia linguarum externarum*), fundada em Roma por Ferdinando de' Medici (1549–1609) em 1584, e desde então sob a direção de Giambattista Raimondi (1536 – 1614), teve um papel importante de divulgação de tratados científicos em árabe ao mesmo tempo que tentou

e abrange três versões, chamadas simplesmente Versões I²⁵, II²⁶ e III²⁷. Com exceção de algumas divergências gramaticais em relação ao texto de Heiberg, as Versões I, II e III contêm o mesmo número de definições no Livro I — 23. A quantidade de postulados também é a mesma, mas com duas diferenças. A primeira delas é que o Postulado 2 é incorporado no 1. A segunda alteração, por conseguinte, é a introdução de um novo postulado, a saber, que duas retas não encerram um plano. Conforme se acompanha os comentários de Proclus, é possível perceber que esta proposição figurava na lista de noções comuns que ele tinha à disposição. Em relação a esta lista, convém notar que a Versão I incorporou as três proposições que Proclus havia rechaçado: a 4^a, 5^a e a 6^a. O fato de Adelardo não ter se pronunciado sobre isso sugere que tais interpolações já estavam presentes no texto de al-Hajjaj. Em relação às demonstrações, a Versão I explicitamente separa o preâmbulo construtivo, i.e., as etapas do enunciado à construção, aparecendo em seu lugar a locução *Exempli gratia*, da demonstração (*Rationis causa*). Esta separação parece servir apenas a propósitos didáticos ou expositivos, uma vez que o raciocínio é basicamente o mesmo que o de Euclides no texto de Heiberg.

A Versão II traz formulações distintas dos enunciados e das demonstrações. O diferencial desta versão é o fato de seu autor ter preferido dar apenas os resumos das demonstrações euclidianas. Seria de se supor que a audiência deste texto era mais qualificada para reconstruir a demonstração completa se lhe fosse requerido²⁸. A Versão III assemelha-se mais a um comentário do que a uma tradução propriamente dita. O autor dessa versão cita explicitamente a Versão II, o que sugere que os princípios e enunciados desta se basearam naquela²⁹. O autor desta versão vai além de seus predecessores ao acrescentar uma série de apontamentos ao longo da obra, além de tê-la propriamente prefaciado. Nota-se também uma maior preocupação em distinguir as partes das demonstrações: *propositio*, *exemplum*, *dispositio* e *ratio*, e *conclusio*. Isso foi feito de maneira incipiente na Versão I.

Gerardo de Cremona (1114 - 1187) traduziu os quinze livros dos *Elementos* até então atribuídos a Euclides (os XIV e XV são apócrifos) e os *Data*³⁰. Depois destes, aparece a tradução de Campano da Novara. A edição preparada por Campano da Novara, de 1259, possivelmente baseou-se na Versão II atribuída a Abelardo, especialmente na escolha dos princípios, mas segue

divulgar o cristianismo em outras línguas. Dentre esses escritos científicos encontra-se uma versão árabe dos *Elementos* preparada por Nasir al-Din al-Tusi. Esta obra, além dos comentários de Proclus e os de Simplício, ajudariam a fixar uma literatura de fundamental importância para discussão do Postulado das Paralelas (Postulado 5 na edição de Heiberg). Em 1651 Edward Pocock preparou uma tradução para o latim do texto de Naṣīr ad-Dīn. O texto foi publicado por John Wallis em *De Postulato Quinto et Definitione Quinta Libri 6 Euclidis Disceptatio geometrica* (In: *Opera mathematica*, 1693, vol. 2, p. 665-678). Raimondi também deixaria suas contribuições com as traduções dos *Dados* de Euclides, das *Cônicas* de Apolônio (a partir dum texto árabe), e da *Coleção matemática* de Pappus. Outros autores publicados incluem Mohammed al-Idrisi, Avicena, Agostinho e Gregorio Nuñez Coronel. Ver Caren Reimann, Ferdinando de' Medici and the Typographia Medicea, In Nina Lamal, Jamie Cumby, & Helmer J. Helmers, *Print and Power in Early Modern Europe (1500–1800)*. Leiden, 2021. p. 220-238.

²⁵ Ver H. L. L. Busard (Ed.), *The First Latin Translation of Euclid's Elements commonly ascribed to Adelard of Bath. Books I-VIII and Books X.36-XV.2*, Toronto, 1983.

²⁶ Ver H. L. L. Busard & M. Folkerts (Eds.), *Robert of Chester's Redaction of Euclid's Elements, the so-called Adelard II Version*, 2 Vols, Berlin, 1992

²⁷ H. L. L. Busard (Ed.), *Johannes de Tinemue's redaction of Euclid's Elements, the so-called Adelard III version*, 2 Vols., Stuttgart, 2001.

²⁸ Curiosamente, a Versão II, segundo Busard, tornou-se a mais popular dentre as traduções dos *Elementos* produzidas no século XII e, ao que tudo indica, fora a mais estudada nos centros intelectuais; seus enunciados proveram o esqueleto de vários e diferentes comentários, dos quais o mais celebrado foi o de Campano da Novara, composto no terceiro quarto do século XIII. Ver Busard, *Op. cit.*, p. 6.

²⁹ E embora a Versão III tenha aparecido depois das I e II e esteja associada ao nome de Abelardo, como o autor faz questão de assinalar (*ab Adelardum Bathoniensem ex arabico in latinum translatus*), sua autoria ainda é objeto de disputa entre estudiosos.

³⁰ Essa tradução foi descoberta por Axel Anthon Björnbo em 1904. Este texto parece basear-se na edição crítica de Thabit ibn Qurra com uma comparação com outros manuscritos. Gerardo de Cremona também traduziu o comentário de Al-Nairizi ao Livro I dos *Elementos*. Este texto foi descoberto por Maximilian Curtze e publicado em 1899 sob o título *Elementorum Euclidis commentarii ex interpretatione Gherardi Cremonensis*.

um caminho completamente distinto quando se trata das demonstrações. Enquanto a Versão II opta por demonstrações breves, Campano expõe a demonstração completa de Euclides mais ou menos como nos manuscritos usados por Heiberg. O texto preparado por Campano tornou-se muito popular nas universidades medievais, sendo o principal acesso aos *Elementos* até o século XVI. Há notícias de uma tradução direta do grego já no século XII. A existência deste texto só foi confirmada na década de 1960 por J. E. Murdoch, o qual conseguiu até mesmo precisar a data de sua redação: 1165. Das versões do texto euclidiano disponíveis no Medievo, esta é a mais próxima dos manuscritos usados na edição crítica de Heiberg, especialmente no número e formulação dos princípios; a divisão dos Postulados 1 e 2, por exemplo, é retomada aqui.

A abundância de versões dos *Elementos* no século XVI se explica pela disponibilidade de manuscritos gregos vindos de Constantinopla em direção à Península Itálica, somados a outras traduções feitas das línguas árabe e persa nos séculos XII e XIII. Dos manuscritos reunidos nas grandes bibliotecas da Itália emergiram três listas de princípios nas edições dos *Elementos*. A primeira delas é a de Campano, publicada em 1482 por Erhard Ratdolt³¹. O sistema axiomático da edição de Campano contém 16 princípios geométricos e 14 princípios aritméticos³². Esta tradução serviu de base para Luca Pacioli, Wilhelm Xylander, Rodrigo Zamorano, Pierre Forcadel, Henry Billingsley e Dou. As duas próximas edições vêm do grego. A de Giorgio Valla (1447-1500)³³, que aparece pela primeira vez na obra póstuma *De fugiendis et expetendis rebus*, de 1501³⁴, sem a inclusão das demonstrações³⁵. Esse sistema axiomático foi popularizado pelo herdeiro intelectual de Valla, Bartolomeo Zamberti (1473–1543)³⁶. Chamaremos essa versão de Valla-Zamberti. A primeira edição (*editio principis*) do texto grego euclidiano é a do alemão Simon Grynaeus (1493 – 1541)³⁷, de 1533.

Simon Grynaeus anexou ao texto de Euclides o comentário de Proclus³⁸. Para além das questões filológicas oriundas da necessidade de se estabelecer uma versão crítica do texto euclidiano, comentadores e filósofos nos séculos XVI e XVII logo tomaram conhecimento, através dos *Comentários* do filósofo platônico Proclus, de alguns problemas metodológicos: a ausência de axiomas no Livro V (teoria das proporções) e nos Livros VII-IX (aritmética); de axiomas relativos a interseção entre linhas, bem como novos axiomas de congruência e transposição de figuras.

³¹ Campano da Novara, *Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi, in artem geometrie incipit quamfoelicissime*, Venezia, Ratdolt, 1482.

³² Esses princípios aritméticos foram extraídos do livro *Arithmetica*, escrito por Jordanus de Nemore (1225-1260).

³³ Valla foi discípulo de Constantine Lascaris, um dos vários refugiados de Constantinopla. O interesse de Valla abrangia praticamente todos os temas conhecidos até então. Ele comentou Cícero (*De fato e Topica*) e Juvenal (*Sátiras*). Dentre os tratados científicos, além de Euclides, destacam-se Aristarco de Samos (*De magnitudinis et distantis solis et lunae*), Hypsicle (*Interpretatio libri decimi Elementorum Euclidis/Disputatio de dodecaedro et icosaedro e Elementorum quartus decimus liber*), Proclus (*De astrolabio*); Galeno (*De bono corporis habitu, De inaequali distemperantia, De febribus, Praesagium experientia confirmatum Galeni, De succidaneis*); Cleônides, *De musica (Harmonicum introductorium, 1497)*. Consta também traduções de Aristóteles: *De caelo et mundo, Ars poetica e Magna Moralia*. Valla ainda publicou um pequeno manual de argumentação, o *Libellus de argumentis* (ou *Ratio argumentandi*).

³⁴ Giorgio Valla, *De expetendis et fugiendis rerum opus*, Venezia, Manuzio, 1501.

³⁵ Valla acreditava que as demonstrações nos *Elementos* eram de Theon, não de Euclides. Essa era a mesma opinião de Petrus Ramus. Bernard Lamy vai ainda mais longe e atribui a Proclus a verdadeira autoria das demonstrações. Ver Lamy, *Les Elemens de Geometrie*, 1685, Prefácio.

³⁶ Bartolomeo Zamberti, *Euclidis megarensis philosophi platonici Mathematicarum disciplinarum Janitoris: Habent in hoc volumine quicumque ad mathematicam substantiam aspirant: elementorum libros XIII. cum expositione Theonis*, Venezia, Tacuino, 1505.

³⁷ Simon Grynaeus, *Εὐκλείδου Στοιχείων*, Basel, 1533. Grynaeus foi aluno de Philip Melanchthon, erudito que deixou uma versão dos *Elementos*. Grynaeus foi professor de latim e grego em Heidelberg, de onde saiu para Basileia em 1529 para substituir Erasmo. Como teólogo, Grynaeus esteve ao lado da Reforma Protestante, tendo envolvimento na Confissão Helvética, bem como na Conferência de Worms em 1540. Além de boas relações com Erasmo, Grynaeus foi amigo de João Calvino. Grynaeus reorganizou Tübingen como uma universidade protestante entre 1534 e 1535.

³⁸ Em 1560 a obra foi traduzida para o latim e publicada por Francesco Barozzi. Francesco Barozzi, *Procli Diadochi Lycii philosophi platonici ac mathematici probatissimi in primum Euclidis Elementorum librum commentariorum ad universam mathematicam disciplinam principium eruditionis tradentium libri IIII*, Patauii, excudebat Gratius Perchacinus, 1560.

Alguns destes princípios antecipam axiomas contemporâneos, como, por exemplo, as relações de incidência e intersecção.

Reforma axiomática e o postulado das paralelas

Uma das mais evidentes diferenças entre as edições e traduções modernas dos *Elementos* está precisamente no tratamento do Postulado das Paralelas (Postulado 5). Tanto as edições medievais quanto a de Valla e Zamberti mantiveram esse princípio entre os postulados. Já na tradução de Oronce Fine (1532), consta um princípio alternativo, embora o Postulado das Paralelas, não incluído por Fine, é usado implicitamente algumas vezes³⁹. Peletier (1557) diz que o Postulado das Paralelas não é um postulado, mas antes uma definição. De uma perspectiva cartesiana, Jacques Rohault (1682) considera o Postulado das Paralelas uma verdade auto-evidente, razão pela qual não precisaria ser enunciado⁴⁰. Grynaeus (1533) transfere o Postulado das Paralelas para a lista de noções comuns, provavelmente seguindo manuscritos mais antigos, além do comentário de Proclus. A maioria das traduções dos *Elementos* segue essa organização⁴¹.

A primeira razão para Proclus rejeitar o Postulado das Paralelas é gramatical. Segundo ele, postulados e axiomas (noções comuns) se diferenciam da mesma maneira que problemas e teoremas⁴². Os enunciados que se seguem dos primeiros princípios ou são a resolução de problemas (*problēmatōn apergasian*) ou a descoberta de teoremas (*theōrēmatōn heuresin*). São problemas os enunciados cujo objetivo é produzir, dividir, subtrair ou adicionar seções de figuras, trazer às vistas, ou, de um modo geral, construir “o que não existe”; exige-se também que uma figura seja posta num lugar, aplicada a outra, inscrita na ou circunscrita por outra, seja ajustada ou seja posta em contato com outra figura. Os enunciados-problemas são frases imperativas que expressam tarefas matemáticas postas para a resolução a partir dos princípios e outros enunciados. São teoremas os enunciados cujo propósito é ver, identificar e, de modo geral, demonstrar a predicação de um atributo a um ente matemático. Os enunciados-teoremas são frases declarativas que expressam proposições que, se verdadeiras, são demonstradas a partir dos princípios e outros enunciados. É a contemplação (*theōria*) da verdade matemática sobre os objetos previamente definidos⁴³.

Segundo esse critério, apenas os postulados de construção deveriam ser admitidos, o que explica a escolha de Grynaeus e os tradutores que o seguiram. Portanto, os Postulados 4-5 ou deveriam ir para a lista de axiomas ou seriam teoremas. Ora, que essas proposições não poderiam ser axiomas se seguiria do fato de não serem auto-evidentes, além de carecer da generalidade típica de um axioma. Portanto, são teoremas, i.e., são demonstráveis.

A grande mudança quanto ao estatuto do Postulado das Paralelas é confirmada nas publicações de Federico Commandino (1572) e Cristóvão Clávio (1574 e 1589), respectivamente⁴⁴. Em primeiro lugar, porque esses autores entendiam, seguindo alguns argumentos de Proclus, que tanto os postulados quanto os axiomas poderiam ser demonstrados. Em segundo lugar, e como

³⁹ O Postulado das Paralelas volta a aparecer na edição de 1536 (sistema de Zamberti)

⁴⁰ O autor segue o sistema de Clávio, mas possui uma concepção cartesiana sobre o conhecimento matemático.

⁴¹ O sistema de Grynaeus foi seguido por Angelo Caiani (1545) Joachim Camerarius (1549); Johann Scheybl (1550); Valentin Naboth (1556); Jean Magnien, Pierre de Montdoré, St. Gracilis] (1557); Xylander (Wilhelm Holtzmann, 1562); Conrad Dasypodius (1564); Pierre Forcadel (1564); Christian Herlin & Conrad Dasypodius (1566); François de Foix-Candale (1566); Jan Pietersz Dou (1606); Denis Henrion (1615); Pierre Herigone (1634); Marin Mersenne (1644). ; [John Keill] (1701. Eembora o autor mencione Commandino no título, o sistema do Livro I é o de Grynaeus); David Gregory (1703); Henry Hill (1726); Guido Grandi (1731); Samuel Klingensstierna (1741); Märten Strömer (1744). [suíço]; Robert Simson (1756); Samuel Koenig (1758).

⁴² Proclus, 178.

⁴³ Proclus, 201-202.

⁴⁴ Os dois textos são baseados na edição crítica de Grynaeus, mas com sistemas de princípios muito mais amplos e complexos.

consequência da primeira tese, porque consideravam ser possível demonstrar o Postulado das Paralelas. //Commadino (1572) afirma que o Postulado das Paralelas deveria ser demonstrado (e, de fato, ele dá a demonstração de Proclus ao mesmo). Commadino introduz o PP14. Não obstante ser baseado no manuscrito usado por Grynaues, Commadino oferece uma das mais refinadas discussões sobre os princípios euclidianos até então.

Clávio (1574), tal qual Commadino, diz que os postulados podem ser reduzidos às definições e que o Postulado das Paralelas poderia ser demonstrado. A edição de 1589 contém uma extensa discussão sobre o Postulado das Paralelas, resultado do conhecimento de Clávio de Nasir ad-Din at-Tusi⁴⁵. Até a publicação da *Crítica da Razão Pura*, a maioria dos comentadores de Euclides defendia a demonstração do Postulado das Paralelas⁴⁶ ou que a teoria do paralelismo deveria ser reformada com o acréscimo de novos princípios⁴⁷.

A consecução dessa tese dependeria do uso de *definições genéticas*, as quais contém o modo de geração de um determinado objeto geométrico. O uso das definições genéticas encontra-se no cerne das tentativas de demonstrar o Postulado das Paralelas, o que resultaria na descoberta das geometrias não-euclidianas no século XIX, bem como no uso do método matemático na filosofia.

Na matemática antiga, a resolução preliminar de algum problema muitas vezes envolve o concurso de algum tipo de procedimento mecânico, o que implica algum tipo de movimento. Nos *Elementos*, tais procedimentos são identificados nos Postulados 1-3, nos teoremas I.4 e I.8, além da Definição XI.14. A estratégia de autores modernos como Clávio foi desenvolver uma teoria das definições genéticas, i.e., definições que apontam o modo de geração de determinada figura. A origem das definições genéticas remonta à Grécia Antiga, embora sua autoria seja incerta. Aristóteles, por exemplo, as menciona brevemente, atribuindo sua cunhagem a Pitágoras e seus seguidores. A principal fonte a respeito dessas definições é a doutrina do fluxo do ponto (ῥύσις σημείου) discutida por Proclus. Ao comentar a definição I.2 de Euclides, Proclus afirma que o autor dos *Elementos* deixou implícita a afirmação de que a linha não tem profundidade, posto que tudo que não tem largura não tem profundidade, mas o inverso não se segue. O fluxo do ponto aparece como uma alternativa.

Quando Francesco Barozzi traduz o comentário de Proclus no século XVI, ῥύσις σημείου é apresentado como um modo definicional (*consequitur definitionem, quae Lineam Signi fluxum esse ait*), de maneira que poder-se-ia pensar doravante que as definições geométricas, e as de Euclides em particular, contém regras de geração de seus respectivos objetos. Esse é o entendimento da maioria dos comentadores dos *Elementos* na Modernidade. Essa interpretação permite defender que os postulados são redutíveis às definições. Commadino, por exemplo, ao comentar o Postulado 1 de Euclides diz o seguinte:

⁴⁵ *Euclidis elementorum geometricorum libri tredecim ex traditione doctissimi Nasiridini Tusini*, Roma, Typographia Medicea, 1594. Esse mesmo texto seria publicado como apêndice por Wallis em *Algebra* (De postulato quinto, 1693). O texto de Clávio foi muito influente, sobretudo entre matemáticos jesuítas. Veja-se, a esse respeito, as traduções de Grienberger (1636), Claude Richard (1645), e Barrow (1655). A opinião desses autores quanto ao Postulado das Paralelas diverge muito da de Clávio. Todos eles reestabelecem o Postulado das Paralelas como um princípio indemonstrável. No caso de Richard, novos princípios sobre paralelismo são acrescentados.

⁴⁶ Demonstrações do Postulado das Paralelas entre os séculos XVI e XVIII: Pietro Antonio Cataldi (1613) John Wallis (1651); Andreas Tacquet (1654); Giovanni Alfonso Borelli (1658); Claude Francois Milliet Dechaes (1672); Caspar Schott (1661); Antoine Arnauld (1667 e 1683); Gilles-François de Gottignies (1669); Honoré Fabri (1669); Vitale Giordano da Bitonto (1680); Wolff, Christian: *Elementa Matheseos universae*. Halle 1713, vol. 1, 103 e 124–130.

⁴⁷ Novos princípios concernentes ao paralelismo foram introduzidos nas seguintes traduções: Giovanni Ricci (1651); Gilles Personne de Roberval (aprox. 1673–1675); Mercator (Nikolaus Kauffmann) (1678); Bernard Lamy (1685); Edmund Scarburgh (1705); Manoel de Campos (1735); Angelo Marchetti (1709); Geminiano Rondelli (1719); Thomas Simpson (1747 e 1760); Johann Friedrich Lorenz (1773).

A partir de qualquer ponto até qualquer ponto, ao traçar uma linha reta. Segue-se daquela definição que afirma que a linha é o fluxo de um ponto, e que a linha reta é um fluxo equânime, e não um fluxo inclinado. Se, portanto, entendermos o ponto como um movimento equânime e o movimento mais breve para um outro ponto, então o primeiro postulado estará feito, sem dúvida alguma, ao entendermos isso de forma invariável.

Outro aspecto da teoria das definições genéticas é a importância conferida à imaginação (*phantasia*), mais uma herança de Proclus. O jesuíta Cristóvão Clávio, ao comentar Definição I.2 dos *Elementos*, fala a respeito do movimento imaginário mediante o qual o ponto, sendo um objeto indivisível, deixa um traço desprovido de largura, sendo esse traço a linha (*Cum enim punctum sit prorsus individuum, relinquetur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum omnis expers latitudinis*). Na Definição I.4, Clávio esclarece melhor o que seja esse fluxo do ponto (*puncti fluxus instead of puncti motus*):

Assim como os matemáticos concebem que uma linha seja descrita pelo fluxo de um ponto imaginário, da mesma forma, pela qualidade do fluxo do ponto, entendem a qualidade da linha descrita. Pois, se o ponto for concebido fluindo ao longo de uma reta o espaço mais curto, de modo que não se desvie nem para um lado nem para o outro, mas mantenha um movimento e progresso uniformes, dir-se-á que a linha descrita é uma reta.

Daí Clávio deduz os postulados construtivos.

Postulado 1. *Seja postulado traçar uma linha reta de qualquer ponto a qualquer ponto.* Este primeiro postulado é extremamente claro, se corretamente consideradas as coisas que acabamos de escrever sobre a linha. Pois, como a linha é um certo fluxo de um ponto imaginário, e, portanto, uma linha reta é um fluxo que progride completamente em linha reta, resulta que, se entendermos que um ponto se move diretamente para outro, de fato, será traçada uma linha reta do ponto a outro ponto.

Postulado 2: *E produzir continuamente uma linha reta com uma linha reta.* E se ainda pensarmos que esse ponto se move de maneira direta, e que é totalmente isento de qualquer inclinação, a linha reta prolongada será contínua, e nunca haverá fim para esse prolongamento, pois podemos entender que o ponto se move a uma distância infinita.

Clávio foi fundamental para a transformação do programa científico dos colégios jesuítas na redação do *ratio studiorum*, além de contribuir para a reforma do calendário juliano, a pedido do Papa Gregório XIII. Ainda em vida, Clávio foi interlocutor de Galileu. Sua edição dos *Elementos* viria a ser estudada por Descartes e Leibniz. Clávio escreveu e publicou um grande número de obras matemáticas, dentre as quais edições e comentários sobre o *Tractatus de sphaera* de Sacrobosco. Nessa obra, Clávio estabeleceu uma diferença entre definição *formal* e *causal* para explicar dois tipos de definir a esfera (*Sphaera est transitus, sit causalis, minime vero formalis*). Uma definição formal apenas esclarece o sentido de um conceito, como dizer que esfera é uma forma arredondada ou sólida, que é descrita pelo arco de um semicírculo em movimento. Uma definição causal, i.e., genética, aponta o modo de geração do objeto definido; por exemplo: a esfera é o movimento da circunferência de uma semicircunferência, que, fixando-se pelo diâmetro, gira até retornar ao seu ponto de origem. A segunda definição encontra-se nos *Elementos* XI.14.

Essa diferença também aparece em Foix-Candale e Billingsley nos comentários a XI.14. A distinção entre definição formal e causal alcançará o século XVII, onde se começa a desenhar uma concepção de demonstração puramente linguística. Ao mesmo tempo, percebe-se aí algumas reflexões a respeito do conceito de análise, com especial atenção à possibilidade da filosofia adotar um método similar ao matemático.

Definições genéticas no século XVII

A tese segundo a qual os princípios matemáticos poderiam ser demonstrados não se limitou apenas aos comentadores de Euclides, como Clávio e Commadino. Ao contrário, ela foi muito difundida entre filósofos no século XVII, dentre os quais vale citar Thomas Hobbes (*De Corpore*, cap. 1–6), Antoine Arnauld & Pierre Nicole (*Logique de Port-Royal*, 1662), Spinoza (*Tractatus de Intellectus Emendatione*, 1677, §§96-97), Leibniz (*De Synthesi et Analysisi universali seu Arte inveniendi et judicandi*, 1679) e Christian Wolff (*Elementa matheseos universae*, 1732). Essa tese é contrária à doutrina aristotélica exposta nos *Analíticos posteriores*, segundo a qual os primeiros princípios (definições, hipóteses e axiomas) são indemonstráveis e independentes entre si. Há, portanto, um novo entendimento a respeito do método científico na Modernidade.

Sob uma perspectiva cartesiana, Antoine Arnauld & Pierre Nicole criticam Euclides por esse ter demonstrado alguns atributos cuja percepção da clareza e distinção seria suficiente para determinar seu pertencimento a uma ideia. Por exemplo, para eles, a demonstração I.20 dos *Elementos* (os dois lados de todo triângulo são maiores do que o terceiro) é desnecessária, posto que se seguiria da simples definição de linha reta; a proposição I.2, por sua vez, seguir-se-ia da aplicação do Postulado 3 (*Logique*, IV.9). Ambas as proposições, segundo os autores, deveriam ser princípios geométricos, não obstante demonstráveis a partir das definições.

Em *Historia et origo calculi differentialis*, escrita aproximadamente entre 1713-1716 durante debates com os newtonianos, Leibniz reafirma a tese segundo a qual somente definições seriam princípios indemonstráveis. Leibniz ilustra isso através de um silogismo demonstrativo da Noção Comum 5 de Euclides: *o todo é maior do que as partes*. Como o próprio autor esclarece, trata-se de uma tese já apresentada na juventude no *Dissertatio de Arte Combinatoria*, de 1666. Esse texto foi escrito sob forte influência da filosofia de Hobbes. Leibniz faz dessa tese o cerne de sua *characteristica geometrica*, na qual tenta demonstrar os Postulados 4 e 5 de Euclides (aparecem aqui como axiomas XII e XIII, respectivamente) e a proposição *duas retas não encerram um espaço* (axioma X).

Vale notar, porém, que Leibniz não estava inteiramente de acordo com o projeto de Antoine Arnauld & Pierre Nicole. Em seu exemplar de *Nouveaux Éléments de géométrie*, Leibniz rebate as críticas de Antoine Arnauld a Euclides ao longo de algumas notas marginais no Livro V. Ele argumenta, por exemplo, que a ausência de uma definição de linha reta impede demonstrações de atributos da reta. Agora, como obter conhecimento a partir de meras definições? Leibniz trata desse problema em *De Synthesi et Analysisi universali seu Arte inveniendi et judicandi* de aproximadamente 1679, onde discrimina definições nominais (*definitiones quid nominis*) e definições reais (*definitiones quid rei*). Uma definição nominal esclarece o sentido de um nome, permitindo singularizar uma coisa. É desse tipo de definição que teria tratado Aristóteles nos *Analíticos posteriores*. Uma definição real, por outro lado, estabelece a possibilidade do *definiens* ao conter seu modo de geração. As definições reais de Leibniz, como se nota, são equivalentes às definições genéticas discutidas pelos comentadores de Euclides no século XVI. De fato, a distinção feita por Leibniz é equivalente às de Clávio.

Como já antecipamos, os principais defensores das definições genéticas tentaram demonstrar o Postulado das Paralelas a partir de novas definições de paralelismo. Essa também havia sido uma estratégia de Proclus, seguida depois por Arnauld (*Nouveaux Éléments de géométrie*, 1667 e 1683), usando argumentos de Nasir al-Din al-Tusi, e o próprio Leibniz. Por outro lado, o uso das definições genéticas tem um desdobramento também na aplicação do método matemático na filosofia.

De Synthesi et Analysis é um elogio do método matemático e sua capacidade de estabelecer verdades dedutivamente. O sucesso desse método reside no uso de definições reais, i.e., definições genéticas. Com efeito, Leibniz critica a demonstração da existência de Deus apresentada por Descartes na Terceira Meditação por essa não conter uma demonstração da possibilidade do conceito principal, a saber, Deus. A partir das definições reais seria possível demonstrar qualquer verdade, com exceção das proposições de identidade. O que é popularmente chamado axioma, i.e., os axiomas euclidianos, podem ser demonstrados a partir dessas proposições por análise do termo sujeito ou do seu predicado.

Uma demonstração, portanto, é composta por proposições de identidade e definições (nominais e reais). O conhecimento que se obtém através das definições reais é chamado por Leibniz de conhecimento *adequado* ou *intuitivo*. Conhecimento adequado é também como Spinoza define na *Ética* (Parte II, Proposição XL, Escólio II) um tipo de conhecimento que procede da ideia de alguns atributos de Deus para o conhecimento da essência das coisas.

O conceito de conhecimento adequado ao qual Leibniz e Spinoza se referem é introduzido por Descartes na Resposta à Quarta Objeção, apresentada por Antoine Arnauld (AT, 220). De fato, Descartes diz que somente por meio de alguma revelação divina o ser humano poderia possuir conhecimento adequado de alguma coisa, posto que, para tanto, seria necessário o intelecto conter exatamente todas as propriedades do objeto conhecido. Descartes, contudo, considera que para tanto seria preciso um intelecto infinito como o de Deus.

A adoção das definições genéticas tem início na reforma axiomática dos *Elementos*, em cujo cerne estava a possibilidade de demonstrar os postulados e axiomas, não obstante ser uma rejeição, na prática, de um dos pilares da ciência demonstrativa de Aristóteles. Daí se seguiram as principais tentativas de demonstrar o Postulado das Paralelas apenas por conceitos, i.e., sem o auxílio dos diagramas. A tradição racionalista vê nessas definições uma maneira de aplicar o método geométrico à filosofia e, com isso, chegar ao conhecimento adequado de Deus e da criação.

Considerações finais

A reforma axiomática dos *Elementos* de Euclides, iniciada com a adoção das definições genéticas, teve um impacto profundo no desenvolvimento da matemática e da filosofia. Essa reforma permitiu que os matemáticos tentassem demonstrar os postulados e axiomas, e também abriu caminho para a aplicação do método geométrico à filosofia. As definições genéticas foram usadas por filósofos racionalistas como Leibniz e Spinoza para tentar chegar ao conhecimento adequado de Deus e da criação. No entanto, a tentativa de demonstrar o Postulado das Paralelas apenas por conceitos não teve sucesso. Apesar disso, a reforma axiomática dos *Elementos* deve ser pensada como um passo importante no desenvolvimento do conhecimento matemático.

A Seção 1 ressaltou o período de renovação do conhecimento matemático durante o século XVI. Mostrou-se que o objetivo inicial dos humanistas, em um primeiro momento, era a elaboração de um texto-base dos *Elementos* capaz de retificar as falhas atribuídas aos medievais. Para tanto, os comentadores modernos puderam contar o recém-descoberto comentário de Proclus sobre o referido texto euclidiano. A partir disso, foi possível chamar atenção para algumas diferenças entre as edições medievais e modernas dos *Elementos*, dentre as quais a mais importante era o estatuto do Postulado das Paralelas. A Seção 4 apresenta as principais objeções de Proclus em relação à natureza indemonstrável do Postulado das Paralelas e como isso influenciou as traduções de Commadino e Clávio. Salientamos a importância da doutrina das definições genéticas, a qual serve ao propósito de reduzir os postulados de Euclides às suas definições. Finalmente, a Seção 5 explora os desenvolvimentos filosóficos adicionais decorrentes do debate

em torno da geometria euclidiana, concentrando-se particularmente no surgimento das tentativas modernas de aplicar o método geométrico à metafísica.

Referências

- ARNAULD, A. *Nouveaux Éléments de géométrie*. Paris: Savreux, 1667.
- BO, Á. J. C. Jerónimo Muñoz's Reception of Proclus' In Euclidem: Philosophy of Mathematics and an Attempt to Prove the Parallel Postulate. *Early Science and Medicine*, 28(6), 631-658, 2023.
- BUSARD, H. L. L. (Ed.). *The First Latin Translation of Euclid's Elements commonly ascribed to Adelard of Bath. Books I-VIII and Books X.36-XV.2*. Toronto: Pontifical Institute of Mediaeval Studies, 1983.
- BUSARD, H. L.L., & FOLKERTS, M. (ed.) *Robert of Chester's Redaction of Euclid's Elements, the so-called Adelard II Version*. 2 Vols. Berlin: Birkhäuser, 1992.
- BUSARD, H. L. L. (Ed.). *Johannes de Tinemue's redaction of Euclid's Elements, the so-called Adelard III version*. 2 Vols. Stuttgart: Franz Steiner Verlag, 2001.
- CIOCCI, A. Federico Commandino and the Latin edition of Apollonius's Conics (1566), *Archive for History of Exact Sciences*, p. 1-29, 2023a.
- CIOCCI, A. Federico Commandino and his Latin edition of Aristarchus's On the Sizes and Distances of the Sun and the Moon. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 77, n. 1, p. 1-23, 2023b.
- CLAGETT, M. The medieval Latin translations from the Arabic of the Elements of Euclid, with special emphasis on the versions of Adelard of Bath, *Isis*, v. 44, n. 1/2, p. 16-42, 1953.
- CLAESSENS, G. Reception and the Textuality of History: Ramus and Kepler on Proclus' History and Philosophy of Geometry, in André Lardinois et al (eds.), *Texts, Transmissions, Receptions: Modern Approaches to Narratives*, Leiden, 2015, p.281–294.
- CLAESSENS, G. Imagination as self-knowledge: Kepler on Proclus' Commentary on the First Book of Euclid's Elements, *Early Science and Medicine*, 16/3 (2011), p. 179 – 199.
- DEIDIER, A. *La science des géomètres*, Paris, Jombert, 1739.
- DE RISI, V. The Direction-Theory of Parallels: Geometry and Philosophy in the Age of Kant. In: *The Richness of the History of Mathematics: A Tribute to Jeremy Gray*. Cham: Springer Nature Switzerland, 2023. p. 511-536.
- DE RISI, V. The development of Euclidean axiomatics. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 70, n. 6, p. 591-676, 2016.
- DE RISI, V. *Leibniz on the Parallel Postulate and the Foundations of Geometry*. Springer International Publishing, 2015.
- EUCLIDES. *The Thirteen Books of the Elements*. Tradução de Thomas L. Heath. Cambridge: Cambridge University Press, 1908.
- EUCLIDES. *Opera Omnia*. Edição de Johan Ludvig Heiberg. Lipsiae: B.G. Teubneri, 1883.
- EUCLIDES. *Euklid's Geometrie, oder die sechs ersten Bücher der Elemente nebst dem eilften und zwölften aus dem Griechichen übersetz*. Tradução de Johann Friedrich Lorenz. Halle, Weisenhaus, 1773.
- EUCLIDES. *Elements of Plane Geometry*. Tradução de Thomas Simpson. Londres: Farrer & Turner, 1747 e 1760.
- EUCLIDES. *Elemens de geometrie contenant les six premiers livres d'Euclide*. Tradução de Samuel Koenig. Den Haag, Scheurleer, 1758.
- EUCLIDES. *Euclidis Elementorum libri priores sex item undecimus et duodecimus ex versione latina Federici Commandini/The Elements of Euclid, viz. the first Six Books together with the Eleventh and Twelfth. In this Edition, the Errors, by which Theon, or others, have long ago Vitiated these Books, are Corrected, and some of Euclid's Demonstrations are Restored*. Tradução de Robert Simson. Glasgow: Foulis, 1756.
- EUCLIDES. *Euclidis Elementa eller Grundeliga inledning til geometrien*. Tradução de Mårten Strömer. Upsala: Kiesewetter, 1744.
- EUCLIDES. *Euclidis elementorum libri sex priores una cum undecimo et duodecimo*. Tradução de Samuel Klingenskierna. Upsala, Höjer, 1741.

- EUCLIDES. *Elementos de geometria plana, e solida, segundo a ordem de Euclides*. Manoel de Campos. Lisboa, Rita Cassiana, 1735.
- EUCLIDES. *Elementi geometrici piani e solidi di Euclide posti brevemente in volgare*. Tradução de Guido Grandi. Firenze: Tartini, 1731.
- EUCLIDES. *The Six First, Together with the Eleventh and the Twelfth Books of Euclid's Elements, Demonstrated after a New, Plain, and Easie Method*. Tradução de Henry Hill. Londres: Pearson, 1726.
- EUCLIDES. *Sex priora Euclidis elementa, quibus accesserunt undecimum & duodecimum*. Tradução de Geminiano Rondelli. Bologna, Longhi, 1719.
- EUCLIDES. *Euclides reformatus*. Tradução de Angelo Marchetti. Livorno, Celsi, 1709.
- EUCLIDES. *The English Euclide, being The First Six Elements of Geometry*. Tradução de Edmund Scarburgh, 1705a.
- EUCLIDES. *Elemens de geometrie de Monseigneur le Duc de Bourgogne*. Tradução de Nicholas de Malezieu. Paris, Boudot 1705b.
- EUCLIDES. *EYKAEIDIOY TA ΣΩΖΟΜΕΝΑ, Euclidis quae supersunt omnia*. Tradução de David Gregory. Oxford: Theatrum Sheldonianum, 1703.
- EUCLIDES. *Euclidis elementorum libri priores sex, item undecimus et duodecimus ex versione latina Federici Commandini in usum juventutis academicae*. Tradução de John Keill. Oxford: Theatrum Sheldonianum, 1701.
- EUCLIDES. *Les elemens de geometrie*. Bernard Lamy. Paris: Pralard, 1685.
- EUCLIDES. *Les six premiers Livres des Elemens d'Euclide*. Tradução de Jacques Rohault. Paris, Desprez, 1682.
- EUCLIDES. *Euclide Restituto, ovvero gli antichi elementi geometrici ristaurati e facilitati*. Tradução de Vitale Giordano da Bitonto. Roma, Angelo Bernabò, 1680.
- EUCLIDES. *Euclidis Elementa Geometrica Novo Ordine ac Methodo fere demonstrata*. Tradução de Mercator (Nikolaus Kauffmann). Londres: Martyn, 1678.
- EUCLIDES. *Huict Livres des Elements d'Euclide rendus plus faciles*. Tradução de Claude François Milliet Dechaes. Lyon, Coral, 1672.
- EUCLIDES. *Elementa geometriae planae*. Tradução: Gilles-François de Gottignies. Roma: Angelo Bernabò, 1669.
- EUCLIDES. *Euclides restitutus, sive prisca geometriae elementa*. Tradução de Giovanni Alfonso Borelli. Pisa: F. Onofrio, 1658.
- EUCLIDES. *Euclidis Elementorum Libri XV breviter demonstrati*. Tradução de Isaac Barrow. Cambridge, 1655.
- EUCLIDES. *Elementa geometriae planae et solidae*. Tradução de Andreas Tacquet. Antwerp: Meurs, 1654.
- EUCLIDES. *De gli Elementi di Euclide li primi sei Libri*. Tradução de Giovanni Ricci. Bologna, Longhi, 1651.
- EUCLIDES. *Euclidis elementorum geometricorum libros tredecim*. Tradução de Claude Richard. Antwerp: Verdus, 1645.
- EUCLIDES. *Euclidis sex primi elementorum geometricorum libri cum parte undecimi ex majoribus Clavii commentariis in commodiorem forma contracti*. Tradução de Christoph Grienberger Graz, Widmanstad, 1636.
- EUCLIDES. *I primi sei libri de gl'Elementi d'Euclide ridotti alla Prattica*. Tradução de Pietro Antonio Cataldi. Bologna: Cochi, 1613.
- EUCLIDES. *Euclidis elementorum geometricorum libri tredecim ex traditione doctissimi Nasiridini Tusini*. Tradução da versão árabe de Nasir Ad-Din At-Tusi. Roma: Typographia Medicea, 1594.
- EUCLIDES. *Euclidis elementorum libri XV*. Edição de Cristóvão Clávio. Roma: Vincenzo Accolto, 1574 e 1589.
- EUCLIDES. *Euclidis elementorum libri XV una cum Scholiis antiquis*. Edição de Federico Commandino. Pesaro: Franceschini, 1572.

- EUCLIDES. *The elements of geometrie of the most ancient Philosopher Euclide of Megara, faithfully (now first) translated into the English tongue*. Tradução de Henry Billingsley. Londres: Daye, 1570.
- EUCLIDES. *Euclidis Megarensis mathematici clarissimi elementa geometrica libri XV ad germanam geometriae intelligentiam è diversis lapsibus temporis iniuria contractis restituta*, Tradução de François De Foix-Candale. Paris, Royer, 1566a.
- EUCLIDES. *Analyseis geometricae sex librorum Euclidis*. Tradução de Christian Herlin, Conrad Dasypodius. Strasbourg: Rihel, 1566b.
- EUCLIDES. *Les six premier livres des Elements d'Euclide*. Tradução de Pierre Forcadel. Paris: Marnef, 1564a
- EUCLIDES. *Euclidis quindecim Elementorum Geometriae primum*. Tradução de Conrad Dasypodius. Strasbourg: Mylius, 1564b.
- EUCLIDES. *Die Sechs ersten Bücher Euclidis, vom Anfang oder Grund der Geometrie*. Tradução de Xylander (Wilhelm Holtzmann). Basileia: Kündig, 1562.
- EUCLIDES. *In Euclidis Elementa Geometrica Demonstrationum Libri sex*. Tradução de Jacques Peletier Du Mans. Lyon, Tornes, 1557.
- EUCLIDES. *Euclidis Megarensis philosophi et mathematici excellentissimi, Sex libri priores de geometricis principiis*. Tradução de Johann Scheybl. Basileia: Herwagen, 1550.
- EUCLIDES. *Euclidis elementorum geometricorum libri sex, conversi in Latinum sermonem*. Tradução de Joachim Camerarius. Leipzig: Valentin, 1549.
- EUCLIDES. *I quindici libri degli Elementi di Euclide, di greco tradotti in lingua thoscana*. Tradução de Angelo Caiani. Roma: Blado, 1545.
- EUCLIDES. *In sex priores libros geometricorum elementorum Euclidis Megarensis demonstrationes*. Tradução de Oronce Fine. Paris: Simon de Colines, 1536.
- EUCLIDES. *Εὐκλείδου Στοιχείων*. Edição de Simon Grynaeus. Basileia: Herwagen, 1533.
- EUCLIDES. *Euclidis megarensis philosophi platonici Mathematicarum disciplinarum Janitoris: Habent in hoc volumine quicumque ad mathematicam substantiam aspirant: elementorum libros XIII. cum expositione Theonis*. Tradução de Bartolomeo Zamberti. Venezia, Tacuino, 1505.
- EUCLIDES. *Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi, in artem geometrie incipit quamfoelicissime*. Tradução de Campano da Novara. Venezia, Ratdolt, 1482.
- FABRI, H. *Synopsis geometrica*, Lyon, Molin, 1669.
- FERREIRÓS, J; LASSALLE CASANAVE, A. Dedekind and Wolffian deductive method. *Journal for General Philosophy of Science*, v. 53, n. 4, p. 345-365, 2022.
- FRANK, M. The Curious Case of QP. 6: The Reception of Archimedes' Mechanics by Federico Commandino and Guidobaldo dal Monte, *Revue d'histoire des sciences*, v. 68, n. 2, p. 419-446, 2015.
- HERIGONE, P. *Cursus mathematicus/Cours mathématique*. Paris, Le Gras, 1634
- HOBBS, T. *Elementorum philosophiae sectio prima De corpore*. In: *Opera philosophica quae latine scripsit omnia*. Londres: Joannem Bohn. Edição de Molesworth, William. [1655] 1839.
- JESUS, D. L. S. *Entre a lógica e a retórica: axiomatizações da geometria euclidiana nos séculos XVI e XVII*. Tese (Doutorado em Filosofia) - Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2023.
- JESUS, D. L. S. Causalidade e matemática no início da Modernidade. *DoisPontos*, v. 16, n. 3, 2019.
- LASSALLE CASANAVE, A. *Por construção de conceitos*. Rio de Janeiro: Loyola, 2019.
- LEIBNIZ, G. W. *New Essays on Human Understanding*. Edição e tradução de Jonathan Bennett. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- LEIBNIZ, G. W. 1989. *Philosophical Essays*. Translated and edited by Roger Ariew and Daniel Garber. Indianapolis, IN: Hackett, 1989.
- LEIBNIZ, G. W. *Philosophical Papers and Letters*. 2nd ed.. Translated by L.E. Loemker. Dordrecht: Springer, 1970.

- LEIBNIZ, G. W. In Euclidis ΠΠΩΤΑ. In *Leibnizens mathematischen Schriften*. Edição de C. I. Gerhardt. Vol. V, 183– 211. Halle: Schmidt, 1858.
- MERSENNE, M. *Universae geometriae, mixtaeque mathematicae synopsis*, Paris, Bertier, 1644.
- OSTERHAGE, W. *Johannes Kepler: The Order of Things*, Springer, Dordrecht, 2020.
- PROCLUS. *Procli Diadochi Lycii in Primum Euclidis Elementorum Comentariorum Libri IV*. Tradução de Francesco Barozzi. Pádua, 1560.
- RICCARDI, P. *Saggio di una bibliografia euclidea*. Bologna: Georg Olms Verlag, 1887.
- ROBERVAL, G. P. *Éléments de géométrie*, around 1673–1675 (Manuscrito Inédito).
- ROSE, L. Humanist Culture and Renaissance Mathematics: The Italian Libraries of the Quattrocento. *Studies in the Renaissance*, v. 20, 1973, p. 94.
- SCHOTT, C. *Cursus mathematicus, sive Absoluta omnium mathematicarum disciplinarum encyclopaedia*, Würzburg, Hertz, 1661.
- SPINOZA, B. *Ethica, ordine geometrico demonstrata*. In: *Benedicti de Spinoza Opera quae supersunt omnia*, Volume 1. Leipzig: Topsis et Sumtibus Bernh, [1677] 1843. Edição de Carl Hermann Bruder.
- SPINOZA, B. *Tractatus de intellectus emendatione*. In: *Benedicti de Spinoza Opera quae supersunt omnia*, Volume 2. Leipzig: Topsis et Sumtibus Bernh, [1677] 1844. Edição de Carl Hermann Bruder.
- VALLA, G. *De expetendis et fugiendis rerum opus*, Venezia, Manuzio, 1501.
- WARDHAUGH, B. Euclid’s Elements in Latin, 1482–1703: vocabulary and classification. *Revue d’Histoire des Mathématiques*, 2024.
- WOLFF, C. 1710. *Der Anfangs-Gründe aller mathematischen Wissenschaften*. Halle. Reprinted in Wolff, 1962, *Gesammelte Werke*, I.12. Hildesheim: Olms.
- WOLFF, C. . 1716. *Mathematisches Lexicon*. Leipzig. Reprinted in Wolff, 1962, *Gesammelte Werke*, I.11. Hildesheim: Olms.
- WOLFF, C . 1740. *Philosophia Rationalis sive Logica*. Frankfurt and Leipzig. Reprinted in Wolff, 1962, *Gesammelte Werke*, II.1. Hildesheim: Olms. Partially translated by Richard Blackwell as *Preliminary Discourse on Philosophy in General*. New York: Merrill, 1963.
- WOLFF, C. 1741. *Elementa Matheseos Universae*. Halle. Reprinted in Wolff, 1962, *Gesammelte Werke*, II.29. Hildesheim: Olms.

Autor(a) para correspondência / Corresponding author: Douglas Lisboa Santos de Jesus. douglas.lisboasj@gmail.com